



丁 玖

今年二月有个传播科学的公众号发表了一位学者关于大学教材与学习方法的个人见解，引发出许多读者的感想留言和热烈讨论。着眼于“数学应该怎么教”这个一代代数学老师和他们的学生都会发问的老问题，我为同一公众号写了一篇文章阐述自己的想法。这篇文章是那篇文章的“加长版”。

首先，为什么要写这篇文章？理由有两个。内在的理由是，我今年64岁了，已经开始考虑何时退休，已经快要走上“人生的边上”。我希望在有生之年留下几百行文字，小小总结一下我对教书艺术的认识和感悟，并对我一生有幸遇到的代表性好老师作一点素描，这样做如能带给年轻的数学教师有用的启发和思考，我的教书生涯也就可以发出最后的一丝光。外在的理由是，在我们从求学到共事的教授队伍里，相当多的人是应该懂得一点“教书的学问”，因为我们的学生应该被教得更好一点。

我们从小进了学校后就开始听老师教数学，其实性急的父母在孩子三、四岁时就教子女几加几等于几甚至几乘几等于几了，生怕落在别人家的孩子后头。从小学、初中到高中，数学老师教了我们十二年之久的初等数学，如果大学进的是理工科院系，数学系的老师根据挂在我们脖子上的标签，比如物理或者生物或者机械，继续教授我们不同类型不同深浅的高等数学。然而现实中普遍的情形是，大学在读生或毕业生要么吐槽数学教科书、参考书写得太次，要么埋怨数学正教授、副教授教得太差。

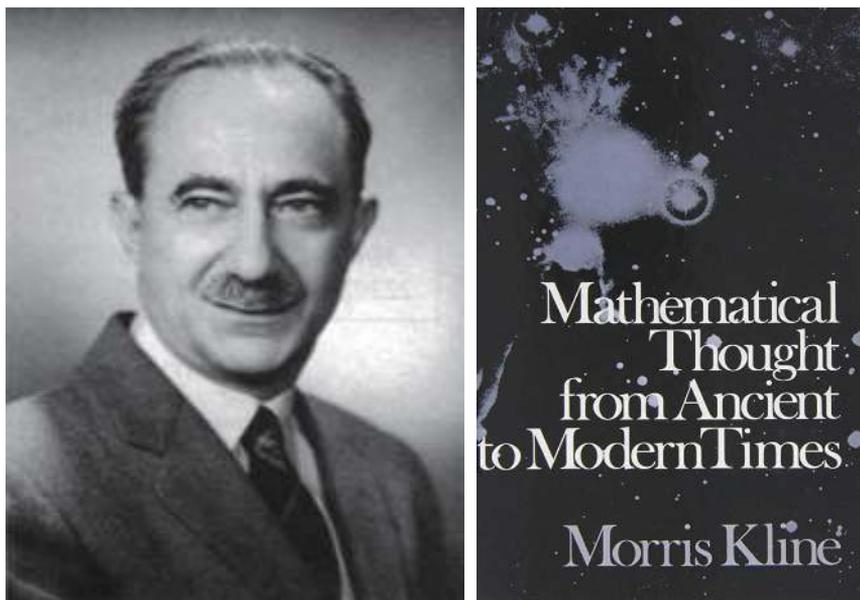
当然，如果一个学生本身就不好好念书，那么就有可能将没学好功课的责任推卸给教材或教师，就像美国一部分书念得不咋地的大学生在匿名的“教学评价表”中，给那些出生在非英语国家的老师或研究生写下的“英文听不懂”的混淆视听的评语。

然而，倘若一名学生是个有志青年，极具学习的动力，但捧在手里的是粗制滥造甚至错误百出的必修课教材，听到的是照本宣科或者解释不清的课堂教学，如果不让其吐出“把教科书摔掉”或“老师可以休矣”的一声叹息乃至满

腔怨言，我们的学校就应该关门。

确实，太多的学生数学没学好或终生恨数学，一个重要原因是老师没教好。因此，探究“数学应该怎么教”是每一位数学教师不得不设法求解的问题，无论他是大学教授还是中小学教员。作为在中国的大学教过三学期基础和专业课、在美国的公立大学正式任教了将近33年的一位老数学教师，我在下面分享一下自己对这一问题的认识与实践，同时传播我受教过的几位教学名师的观念与做法。

研究数学总是从公理和假设开始，为了探讨“怎样教数学”这个论题，我们也假设，所教的数学某一学科的教材是优质的，所教的学生也是愿意学的。如果把好教材看成是布景适中的舞台，把好学生视为台下不发出嘘声的理想观众，那么授课老师将如何像一名好演员那么地表演到位呢？



莫里斯·克莱因（1908-1992）与《古今数学思想》

美国布朗大学的已故应用数学教授、写过一本巨著《古今数学思想》的克莱因(Morris Kline),对于课堂教学有过一段已成经典的精辟论述和殷切期待¹:

“我想力劝每位老师成为演员。他必须借助戏剧的每一种道具使他的授课技巧彰显出生机与活力。他有必要在适当的时候运用戏剧效果，在讲述事实的同时展现激情。不寻常的怪异举动能够激发人们的兴趣，挥洒自如的幽默能够极大地活跃课堂，即便这与授课内容貌似无关。

¹ I would urge every teacher to become an actor. His classroom technique must be enlivened by every device used in theatre. He can be and should be dramatic where appropriate. He must not only have facts but fire. He can utilize even eccentricities of behavior to stir up human interest. He should not be afraid of humor and should use it freely. Even an irrelevant joke or story perks up the class enormously.

数学既是精确演绎的科学，也是严密布局的艺术，它不仅难学，而且难教。这就引出教好数学的一项必要条件：你必须胸中升起克莱因希望你能点燃着的激情之火。如果阁下对教书缺乏火一般的热情，最好不要去当数学老师，免得终生萎靡不振；如果你拿到了数学博士学位并极具研究潜质，但不爱教书，那么最好去申请中国科学院数学与系统科学研究院或其他合适研究机构的助理研究员位置，因为那里无需教书，而且雇主还会给你不错的薪水。但是，你要记住，不喜欢教书的人有相当的概率也不喜欢与他人交流，这种习惯有可能会降低研究的效率，因为许多灵感是在饭桌旁、会议内或远足郊游的相互交谈中获得的。

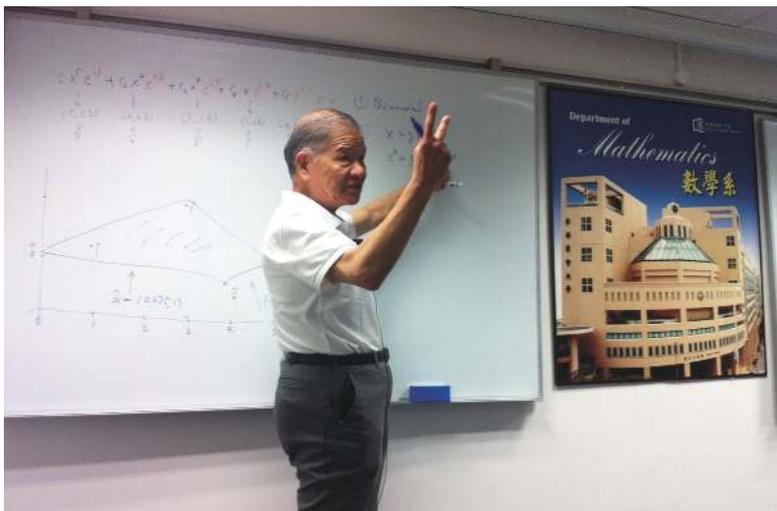
热爱教书的人几乎都有“大嗓门”的特点，他们讲课的声音可以穿透教室的每一个角落，即便是耳背的退休老人，也可以坐在教室的后排旁听，清楚地收到年轻时因为贪玩没能学会的知识。不要低估这个“音响效果”，它可是衡量书教得好不好的一个容易测量的重要指标。我的外祖父在解放前教了几十年的书，桃李满天下。我自然无缘进他的教室听讲，但小时候的我随父母去看望外祖父母时，他清瘦的嘴巴发出考我们成语典故的洪亮声音大到我只好后退一步。即便在他生命的最后几天，90岁的他嫌三个下肚的嫩鸡蛋不够劲的呐喊声依然那么有力。这就是一个好老师的特色。先母完全继承了他的衣钵，从15岁起手执教鞭，不仅以板书之美著称，而且也以声如洪钟存世。

我一生中有幸受教过的几位大学数学老师，课堂中无一不以中气饱满留给学生深刻印象。我在南京大学读大一时教我们《线性代数》的林成森老师，他不仅中文字发音清楚，语调抑扬顿挫，而且新出场的数学概念也解释得比水晶还透彻明亮。我曾在一部尚未出版的回忆录里写道：“他的课如果听不懂



中年时期的林成森老师（1937-）

的话，只能要问自己的脑子是否要动个小手术了。”比他讲课还要“尽情表演”的可能要数我在密歇根州立大学读书时的博士论文指导老师李天岩教授了。他完全有资格充当克莱因教授的“案例”展现给读者示范怎样教书。他一生中有三分之二的时间是在和侵犯肾脏的病魔作斗争，但他在教室里的声调和手势比两肾健全者还要有力，一旦讲到关键的概念和奇妙的思想，他会重复强调好几遍，而且声带的振幅越来越大，甚至以精神饱满的夸张神态和动感十足的肢体语言助力同学们的理解。那种激情澎湃，那种感染力度，把坐在那里的所有学生都融化了。面对着这样的教书先生，学不好才怪呢。



李天岩教授（1945–2020）2011年秋在香港浸会大学系列讲座

二十余年前，我邀请过邻州不远的南阿拉巴马大学微分几何教授张新民来我系作讲座，他或许是我听到过的美国南方数学家中嗓门最大的一个了。他作报告时的投入和声调让他的演讲主题“动力几何”更加动态，一个个几何图形在高振幅中翩翩起舞。听众们听得情绪高涨，以至于过了不久，我将他再次请来，讲他各式各样的“等周不等式”，让我系教员和研究生们再过一把瘾。请来这样的满有效果的演讲者，我系所花的酬金完全值得。正因为被他的声带引起共振，我对他讲演中提出的几个维数猜想发生了兴趣，与他及别人解决了其中的大部分，发表在专业期刊《分形》上，所以系里付给他的报告旅费就“一本万利”了。过了十年，一位曾修过张教授课的阿拉巴马州女高中教师来我校读数学教育的博士学位，注册了我的一门高等微积分课程，和我交谈时一提起往日的授课老师，她就眉飞色舞地回忆起张教授的课堂表演。

自然，有的教师并非生来讨厌教书，却可能是生来天性腼腆，上了讲台就像羞答答的小姑娘不敢见生人，胆小到甚至不敢面对学生，只敢面对黑板与之交谈，声音轻得或许只有第一排才能听清楚。这怎么办呢？如果她或他天性热爱学生，也懂得教书的艺术，完全可以治好这一“非致命毛病”。要知道即便一些杰出的学者，学术交流时也会“牙齿颤抖”甚至声音“细若蚊虫”，著名的一例是日本首位诺贝尔奖获得者汤川秀树（Hideki Yukawa），他在这方面给人留下的深刻印象，让曾同爱因斯坦在普林斯顿高等研究院共事的荷兰裔美国理论物理学家派斯（Abraham Pais），在他的“原子弹之父传记”《奥本海默的一生》中，不忘对这位来自东方的学者记上一笔²：他是一个友好但害羞的人，这一点在他研讨会报告时尤为明显。不仅说话声音小，还背对着听众对着黑板讲话，简直就是折磨听众。

² He was a friendly but shy man, as was particularly noticeable when he gave seminars. Not only did he speak softly, but he would also turn his back to the audience and address the blackboard, pure torture for his listeners.



汤川秀树 (1907-1981)



派斯 (1918-2000)

克服自信心不足导致讲课声音小的缺陷有个可能有效的方法，就是效仿大街上看到的两个悍妇吵架那样鼓足干劲，大开嗓门。吵架的双方总是以为真理只掌握在自己手里，于是都“理直气壮”，分贝自然大涨。同样的理由，讲课的老师拥有知识，而讲台下的学生们因为还没有获得知识，因而“真理”还在自己手里，可以想象他们应该“洗耳恭听”，所以也应“理直气壮”。有了这样的心理因素，讲课时的“胆怯”这个敌人只会吓得逃之夭夭，声音也就能成比例地上扬。

其实，有一部分人，生来就不怕学生，属于“天生适合当老师”那类高等动物。我很早就发现自己也是其中的一员。1973年晚春，当我还在14周岁的年纪，高中毕业后已经无校可念了，只好为家里人烧中饭。一天父亲回到家问我，他的学校一位数学老师因故离开一个月，需要找一名代课老师，他问我敢不敢教。我那时很想为家挣钱，马上答应。我第一天教的是“球冠的体积”，这个初中班的学生年龄几乎个个比我大，不少人个子也高于我，但我根本不怕他们，因为我对课本上的数学内容已经非常熟悉，成竹在胸，也遗传性或耳濡目染地无师自通如何去讲授它。家父怕我压不住学生，坐在最后一排，以防不测，毕竟方鸿渐曾在钱钟书先生的《围城》里被班上的捣蛋学生整得不轻。但他坐了五分钟后知道完全是多此一举，这是他一生中唯一一次听我讲课。本校一群女老师在窗口探头探脑好奇我怎样表演。一个月后，父亲领回了我一生中的第一笔收入——27元代课费，并告诉了我班上学生认为我比之前的那个江苏省扬州中学66届高中毕业生下乡知青老师教得还要好。这一个月也让我感到自己未来如果有机会的话，可以继承家业当个合格的教书匠。