

怀特海、罗素与《数学原理》

郭海鹏

在十九世纪后半叶和二十世纪初，数学界围绕着“数学是什么？”这一重要问题展开了一场争论，结果产生了三大学派：形式主义（formalism）、直觉主义（intuitionism）和逻辑主义（logicism）。形式主义学派认为数学是按照一定推理规则对数学符号进行操作变换的形式系统，与现实无关，其代表人物是德国数学家希尔伯特。直觉主义学派认为数学对象是由人的原始直觉所构造的，直觉主义否定排中律的有效性，强调数学证明必须是构造性的，其代表人物是荷兰数学家布劳威尔。逻辑主义认为所有的数学都可以简化为逻辑，由戈特洛布·弗雷格（Gottlob Frege）创立，但英国哲学家和数学家伯特兰·罗素（Bertrand Russell）和阿尔弗雷德·怀特海（Alfred North Whitehead）在其合写的三卷本巨著《数学原理》（*Principia Mathematica*, 1910, 1912, 1913）中对逻辑主义给出了最清楚的阐述。怀特海在剑桥大学三一学院任教期间曾经是罗素的导师，两人之间有过密切的学术交流和合作。令人赞叹的是，怀特海和罗素既是二十世纪重要的数学家，也都是开宗立派的哲学家。罗素是分析哲学的奠基人和重要代表，怀特海是过程哲学的开山鼻祖。怀特海和罗素在二十世纪初开始的长达二十年的合作经历写就了数学史上的一段佳话，两人合写的经典著作《数学原理》更堪称是现代数学王国中的一块璀璨夺目的瑰宝。本文拨开历史烟云，略述怀特海和罗素合著《数学原理》的来龙去脉，以飨读者并向两位先哲致以诚挚的敬意。

孤独探索：与罗素合著《数学原理》之前的怀特海

怀特海 1861 年 2 月 15 日出生于英国的肯特郡，少时接受古典博雅教育，于 1880 年作为入学奖学金获得者进入剑桥大学三一学院学习数学，之后在剑桥持续生活了 30 年，一直到 1910 年夏天移居伦敦。这一时期被称为怀特海学术生涯的“剑桥时期”，期间他的研究兴趣主要集中在数学领域。1884 年，怀

特海在结束了四年的大学本科学习后，旋即获得了三一学院的理事职位，并得以留校任教。在大学时期，怀特海对麦克斯韦的电磁理论产生了浓厚的兴趣。据罗素回忆，怀特海的理事资格论文题目就是“麦克斯韦的电磁理论”。

怀特海作为一个数学家的学术生涯具有非同寻常的特征。在获得三一学院理事身份之后的五年内，怀特海发表的论文几乎是一片空白，仅于1889年初在《纯粹和应用数学季刊》上发表了两篇关于黏性流体一般运动公式的论文。怀特海似乎对解决具体的数学问题缺乏足够的兴趣，而更醉心于孤独地探索和思考更基本、更深刻的问题，比如数学的基本性质。在一封1912年写给伦敦大学学院教务长的求职信中，怀特海曾写道：

“在过去的二十二年，我一直在从事一项宏大的工作，包括对数学符号论和数学观念的逻辑审查。这项工作源于对电磁学数学理论的研究，并且一直把对物质和空间关系的一般审查当作其终极目的。¹”



怀特海（1861–1947）（伦敦韦尔科姆图书馆照片²）

严格算起来，这项“宏大的工作”始于1890年，这正是怀特海开始撰写他的第一本数学专著《泛代数论》（*A Treatise on Universal Algebra*）的前一年。在书中关于数学的基本性质怀特海写道，“数学的理想应该是建立一种计算法则，以便于与思维的每个领域或外在经验相联系，其中思维或事件的连续性可

¹ Letter to the dean of the University College London, in Victor Lowe, Alfred North Whitehead: The Man and His Work. Volume 1, 1861–1910. Baltimore: Johns Hopkins University Press. pp155-56.

² 此文件根据 Creative Commons Attribution 4.0 (https://en.wikipedia.org/wiki/Creative_Commons_license) 国际许可证许可使用。

以明确确定和精确陈述。因此，所有不是哲学、归纳推理或想象性文学的严肃思考都应该通过一种计算法则发展出来的数学。³”

《泛代数论》第一卷，也是唯一的一卷，最终于1898年出版面世，该书的出版使怀特海在1903年当选英国皇家学会会员。怀特海对布尔代数所做的贡献很大。哈佛大学数学家E. V. 亨廷顿曾说，布尔代数“产生于布尔，扩展于施罗德，完善于怀特海。⁴”在1898年和1903年之间，怀特海致力于《泛代数论》第二卷的写作准备，但后来却没有继续下去。这主要是因为在与罗素的沟通交流中，怀特海发现他们在数学方面的写作计划和思路几乎完全一致，于是两人决定合写《数学原理》一书。最初两人计划一年内就完成《数学原理》，没想到最后一写就是十年之久，从1900年开始，一直到1910年才完成。

悖论危机：与怀特海合著《数学原理》之前的罗素

罗素1872年5月18日出生于蒙默斯郡一个贵族家庭，比怀特海小11岁。他于1890年进入剑桥大学三一学院学习数学，当时怀特海已经留校任教多年，碰巧是罗素申请大学生入学奖学金考试的阅卷人。尽管罗素考卷分数没有达标，但怀特海认为他的论文比卷面成绩展示出更加突出的优点，从而说服考官同仁们破格授予罗素入学奖学金资格。1895年罗素大学毕业，跟怀特海一样也获得三一学院理事资格。罗素的理事资格论文题目是“几何的基础”。在这一时期，罗素的哲学观充满了康德和黑格尔的色彩。



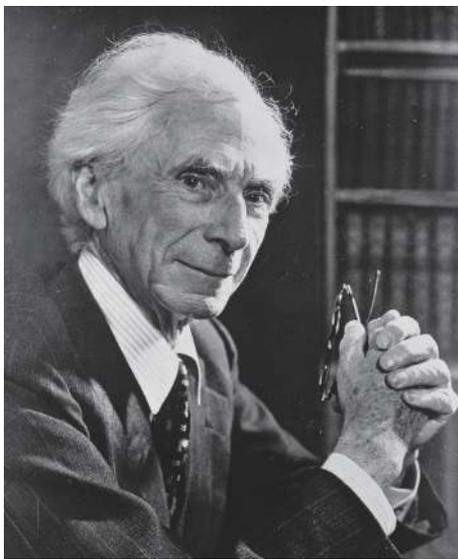
剑桥大学三一学院⁵（由亨利八世创建于1546年）

³ Whitehead, A. (2009). *A Treatise on Universal Algebra: With Applications*. Cambridge: Cambridge University Press. (First published in 1898)

⁴ E.V. Huntington, *New Sets Of Independent Postulates For The Algebra Of Logic, With Special Reference To Whitehead And Russell's Principia Mathematica*, *Journal of the American Mathematical Association*, Vol. 35, pp278 footnote, 1933.

⁵ 此文件根据 Creative Commons Attribution Share Alike 2.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>) 通用许可证许可使用。

1897年，罗素出版他的第一本数学专著《论几何基础》(*An Essay on the Foundations of Geometry*)。在这本书的序言中，罗素坦言他受到了怀特海的影响，“贯穿整个建构过程的不断批判和建议，尤其是关于射影几何哲学意义方面”⁶。随后罗素又开始构思另一本关于数学基础的书：《数学的原理》(*The Principles of Mathematics*)。1900年罗素与怀特海一起赴巴黎参加第一届国际哲学大会以及随后举行的第二届国际数学家大会。罗素在哲学大会上宣读了一篇论文“论时间与空间的绝对位置”。怀特海在两个会议上都没有宣读论文，不过他是数学家大会上五位主席中唯一的英国人。在这次会议上罗素的最大收获是遇到了意大利数学家皮亚诺(Giuseppe Peano)。这次会议成为罗素“智力生活的转折点”，皮亚诺的数学逻辑方法乃至所采用的数学符号对罗素有醍醐灌顶的作用，因为这正是他一直渴求的方法和工具。罗素很快掌握了皮亚诺的方法，并将其推广至关系逻辑。这个新方法使罗素如虎添翼，《数学的原理》的写作速度也大大加快，在三个月内就完成了该书的初稿。



罗素(1872-1970)⁷

然而好景不长，1901年春天罗素发现了著名的“罗素悖论”，马上在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大的震动。受康托最大基数悖论的启发，罗素构造了一个具有自指性质的悖论：如果把不包含自身的所有集合当成一个集合，那么这个集合是否包含它自身？具体来说，设 R 是一个包含所有不包含自身的集合的集合，即 $R = \{x \mid x \text{ 不是 } x \text{ 的元素}\}$ 。问题在于， R 是否包含自身？如果 R 包含自身，则根据定义，它不应该被包含在 R 中；但如果 R 不包含自身，则

⁶ 维克多·洛著(杨富斌、陈伟功译)，《怀特海传》，第270页，商务印书馆，2018年。

⁷ (荷兰国家档案馆图片，1957年)