随高斯爬山

万精油

曾经有一个“美丽数学公式”名单在数学界流传。据说那是著名数学家、菲尔兹奖获得者阿蒂亚（Michael Atiyah）列出来的，总共 60 个公式。第一页是下面这十个：

Equation	Description
$1+e^{i\pi}=0$	Euler's identity links 5 fundamental mathematical constants with three basic arithmetic operations each occurring once.
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	The Pythagorean identity, which states that for any angle, the square of the sine plus the square of the cosine is 1.
$V-E+F=2$	Euler's formula for triangulation of a polyhedron, where V is the number of vertices, E edges and F faces.
$\int_M K dA+\int_{\partial M} k_g ds=2\pi\chi(M)$	The Gauss-Bonnet theorem connects the geometry of surfaces (curvature) to their topology (Euler characteristic).
$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	Identity between exponential and trigonometric functions derivable from Euler's formula for complex analysis.
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$	Definite Gaussian integral - ubiquitous in mathematical physics.
$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\quad s\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Re}(s)>1$	The reciprocal of the zeta function can be expressed as a Dirichlet series over the Möbius function $\mu(n)$
$exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$	Series expansion for the exponential function.
$\mathcal{F}_x[e^{-ax^2}](k)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2k^2/a^2}$	The Fourier transform of a Gaussian is a Gaussian.
$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	An identity for Euler's number e.

阿蒂亚的这组公式不完全是按优美度排列的。他本意是把这组公式给数学家看，用来测试数学家对所谓“数学美”的反应。不过，我觉得先列出的公式在某种程度上反应了他自己在心里对这些公式的大致排名。比如，列在第一位的欧拉恒等式，这是大家公认的最美数学公式。说它最美的原因是：简明、整洁、深刻，而且包含了数学里最重要的 5 个常数：0, 1, i, e, π. 这个公式确实很美，需要专门大字写出来展示一下：

$$e^{i\pi}+1=0.$$

除了排在第一位的欧拉恒等式，其它公式的美丽程度就没有统一意见了。不同的数学家有不同的意见。以我自己的审美来说，我认为最美的是排在第四的高斯 - 博内（Gauss-Bonnet）定理。

高斯 - 博内定理是我们这篇文章的主角，先大写出来：

$$\int_M KdA+\int_{\partial M}k_g ds=2\pi\chi(M),$$

其中 M 是一个紧致二维黎曼流形，K 是其高斯曲率。∂M 是 M 的边界，kg 是边界的测地曲率。右面的 $\chi(M)$ 是 M 的欧拉示性数。这个定理的深刻之处在于它建立了局部性质与整体性质的关系。曲率是局部性质，欧拉示性数是整体拓扑性质。表面看起来完全无关的东西被一个公式联系起来。用通俗语言来描述这个定理就是，对于一个紧致二维曲面，不管曲面内部如何打坑，隆起，只要不穿孔，它的总曲率是不变的。第一次见到这个定理时，为它简洁的公式，深刻的结果而震惊，太美妙了。后来每次见到它，仍然总要为它的优美而感叹。

没有学过微分几何的读者或许不能完全体会到这个定理的优美。因为它所牵涉到的紧致流形、曲率、欧拉示性数等概念本身的定义就不简单，更不要说它们之间的关系了。

但是，如果我们对 M 做一些限制，这个定理的表现形式就要简单一些，更容易理解和欣赏。比如，我们考虑 M 是二维曲面上的一个测地三角形的情形。曲面上的测地三角形就是由测地线连接曲面上的三点所构成的图形。测地线可以理解为局部连接两点之间的最短线。对平面来说，测地线就是直线。测地三角形就是平面三角形。当 M 是测地三角形时，因为测地线测地曲率为 0，上面公式中的边界积分简化成三条测地线的拐角和，而三角形的欧拉示性数是 1。在这种情况下，高斯 - 博内定理可简化为

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\pi+\int_M KdA,$$

其中，βi 是三角形的三个内角。

我们知道，在平面上，三角形内角和等于 π（180 度）。但是，在曲面上，三角形内角和就可能不等于 π。这个公式告诉我们，在负曲率曲面上，因为面积分为负，三角形内角和小于 π，比如罗巴切夫斯基几何。在正曲率曲面上，因为面积分为正，三角形内角和大于 π，比如球面几何。这两个结果曾经是几何的这两大分支的两个奠基性定理，现在被一个公式的特例搞定。是不是开始对高斯 - 博内定理的美丽有了更多的欣赏？

进一步再加限制，把二维曲面限制成二维单位球面，曲率恒等于 1，那么，曲率的面积分就是它的面积。上面的公式进一步简化为

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i - \pi = A.$$

用通俗语言来说就是，球面上的测地三角形内角和大于 π，比 π 多出来的部分正好等于这个三角形的面积。这个表达式高中生就能理解，高中生也能欣赏这个定理的美丽了。

我们用一个简单的例子来验证一下。从北极沿两条夹角为 90 度的经线出发到赤道。比如经度为 0 和 90 度的两条经线。经线与赤道的夹角是 90 度。经线与赤道都是测地线（大圆），由这两条经线与赤道组成的这个球面三角形就是一个测地三角形。它有三个直角，其总和为 $3\pi/2$，比 π 多出 $\pi/2$。再来看这个球面三角形的面积。显然，这个三角形的面积是球面积的 1/8。单位球的面积是 4π。其 1/8 就等于 $\pi/2$，与三个内角和比 π 多出来的部分相等。验证了上面等式。