数学与数据科学：小波的故事

董 彬　　沈佐伟

编者按

在科学技术的发展历史中，数学与物理学的紧密结合一直是推动科学进步的核心动力。进入21世纪的大数据时代，这种合作模式经历了重要转变，数学与数据科学的交叉融合逐渐成为新的科学研究推动力。这一转变不仅是数学与物理学辉煌传统的继承，更是通过融入数据科学，为科学研究开辟了更加广阔的天地。本文通过探讨数学在图像科学和机器学习领域的应用，着重展现数学与数据科学如何携手并进，推动科技的前沿发展。

小波理论和压缩感知是应用数学领域的两个关键研究方向，也是图像科学中不可或缺的数学工具。小波，作为一类特殊函数，能够高效地生成函数空间的基或框架，从而有效地表征函数。而压缩感知则作为一种信号采集与重建的方法论，旨在在不降低信号重建质量的前提下，尽可能减少所需的采样数据。

本文首先对小波理论和压缩感知的基本原理及其在图像处理中的核心应用进行了深入探讨。通过一系列著名数学家的生平故事，文章生动展示了他们如何巧妙地将数学理论应用于实际问题的解决，彰显了数学在应对各种复杂和多样化问题中的核心地位。这些数学家的故事不单展示了他们的个人研究成就，更生动地呈现了他们是如何通过理论革新和跨学科协作来应对现实世界的挑战。

接着，本文详细回溯了作者及其合作伙伴在小波框架理论、图像处理应用以及深度学习领域的研究旅程。文章不仅深入探讨了小波框架理论的发展历程和其在图像处理算法中的应用，还详细讨论了偏微分方程（PDE）方法与小波方法之间的紧密联系。此外，本文还阐述了作者们是如何运用数学工具来推动深度学习理论和算法的创新。通过介绍这些研究背后的人物、小故事和研究动机，文章展现了作者及其合作者们如何在理论与实践之间找到平衡，持续探索新的研究领域，并不断扩展其科学视野。[1]

[1] 本中关于数学家的个人履历和研究工作，若未做特别说明，均来自 wikipedia 或 https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

1. 数学与数据

在科学技术的演进历程中，数学与物理学的紧密结合一直是驱动科学进步的核心动力。从牛顿和莱布尼茨发展微积分，到笛卡尔创立解析几何，这些数学工具极大地推进了物理学在揭示自然界基本规律，特别是在阐释力学和物理现象的基本原理的理解等方面。从 17 世纪到 19 世纪期间，众多科学家，包括伯努利、欧拉、拉格朗日和拉普拉斯等，在微积分、流体动力学、分析力学和天体力学等多个领域，推动了数学在物理学中的广泛应用。同时，麦克斯韦和开尔文对电磁理论和热力学的深入研究，进一步加深了数学与物理学之间的紧密联系。这些突破性的成就不仅塑造了现代科学研究方法，也为 20 世纪物理学的重大突破奠定了基础。同样，物理学的发展也不断地促进了数学理论的进步。这些历史性的进展充分证明了数学和物理学交叉合作的重要性。

值得注意的是，早期基于现象观察的物理学研究，实际上也与数据密切相关，尽管这些数据可能与现代意义上的数字数据不同。这些早期的数据多是通过人类感官，如眼睛，来直接捕捉自然界的现象。虽然这种方式在获取数据时可能存在局限性（例如，某些现象转瞬即逝，容易被人眼忽略，且难以进行多次重复观测），但它仍然是物理学早期研究的基本手段。

进入 20 世纪下半叶，特别是 20 世纪末和 21 世纪初，科学研究的范式经历了显著的变化，其中一个显著的趋势是数学与数据科学的紧密结合，形成了一种全新的科研模式。数据科学，作为一门集统计学、计算机科学和信息理论于一体的跨学科领域，专注于从大规模数据集中挖掘知识。其核心目标是设计算法来理解和分析复杂数据，以此辅助科学决策。21 世纪各类传感技术的发展和电子计算机的普及，让我们能够收集和处理大量的数据，从而催生了数据科学这一新兴学科。在这个新的发展阶段中，大数据的迅猛增长和计算能力的飞速提升，对科学研究方法产生了革命性的影响，也彰显了跨学科合作的重要性。这使得传统的物理学和数学相互促进的模式得到了进一步的加强和拓展。

在数据科学的迅猛发展过程中，数学扮演了不可或缺的角色。作为一种精准且高效的科学语言，数学不仅为数据科学提供了坚实的基础工具和理论框架，还在推动这一领域的革新中显现了其巨大的威力。特别是在 小波分析、偏微分方程和压缩感知等领域取得的重大突破，充分体现了数学在推动数据科学发展中的核心地 位。例如，在图像处理和信号分析中，小波理论提供了有效的多尺度和稀疏逼近方法，这些方法在数据压缩、去噪和特征提取等关键应用中展现了卓越的性能。此外，基于稀疏性原则的压缩感知理论，不仅颠覆了传统的数据采样和重建观念，还打破了奈奎斯特采样定理的限制，为信号重建带来了巨大变革。

在本节接下来的部分，我们将重点探讨小波理论和压缩感知和它们在图像科学中的应用，深入分析这些数学理论与数据科学交叉促进的具体案例。这些案例不仅展现了数学工具在解决实际问题中的高度实用性，也揭示了理论研究

与应用实践之间的密切联系。通过这种跨学科的互动和协作，我们能够更全面地理解数学与数据科学是如何共同推动科技的进步，并解决现代社会面临的众多挑战。

1.1 基于多分辨率分析的正交小波（Wavelets）与图像

正交小波与数据分析的紧密联系始于哈尔小波的创立，并随后经历了显著的发展。由于其结构简单和直观的计算方法，哈尔小波成为了小波理论的一个重要起点。然而，哈尔小波在平滑性方面的局限性催生了小波理论的进一步发展。

迈耶尔（Yves Meyer）和马拉（Stéphane Mallat）提出的多分辨率分析（multiresolution analysis, MRA）理论，对小波分析领域产生了革命性的影响。多分辨率分析不仅桥接了离散和连续小波变换，还极大地简化了小波的构建过程。多分辨率分析理论不仅让迈耶尔构造出了在频域具有紧支集的 band-limited 小波，也为道贝希斯（Ingrid Daubechies）的正交小波的发展铺平了道路。道贝希斯小波以其出色的平滑性和紧支集特性，在数据处理中展示了显著优势。

小波分析与数据处理的密切关系主要体现在信号和图像处理方面。尤其是多分辨率分析理论中提出的多 尺度分析，使小波变换能够更有效地适应不同尺度的数据特征。多分辨率分析构造的小波对应着滤波器组，可以通过多重卷积运算来实现快速小波变换算法（Fast Wavelet Transform, FWT），为小波分析在信号和图像处理中的应用创建了独特的优势。小波分析不仅为信号提供了多尺度表达，还能够利用其稀疏逼近性质从而 高效地进行信号和图像的压缩与重建。小波的这些独特的数学特性，使它成为了数据处理的一个强大的工具。

在本节中，我们将通过小波分析理论的演进及其在推动数据科学——特别是在信号与图像处理领域的进步——来展示数学和数据科学的相互促进和发展。

1.1.1 哈尔小波

小波的发展始于哈尔（Alfréd Haar）于 1909 年提出的哈尔小波 [2]。哈尔是一位杰出的匈牙利数学家，生于布达佩斯的一个匈牙利犹太家庭。他的学术生涯始于中学时期，当时他就与 *Középiskolai Matematikai Lapok* 这本数学期刊合作，并赢得了国家级的艾特沃什 • 洛兰德数学竞赛奖。哈尔最初在布达佩斯理工大学注册为化学工程专业学生，但不久后转至布达佩斯大学学习，随后进入哥廷根大学深造，成为希尔伯特的学生。1909 年，在希尔伯特的指导下，哈尔完成了他的博士研究，其论文深入探讨了斯图姆 - 刘维尔函数和球面函数系统，引入了现今广泛使用的哈尔正交系统。这是正交函数领域开创性的工作，为后续的小波理论研究奠定了基础。

[2] A. Haar. Georg-August-Universitat, Gottingen., 1909.

正如图 1 所示，哈尔小波函数 $\psi(x)$ 以其分段常数的简明形式著称，其中在区间 $[0, 1/2)$ 上取值为 1，而在 $[1/2, 1]$ 上取值为 -1。通过伸缩和平移操作，哈尔小波能够生成一个函数族：

$$W=\{\ 2^{k/2}\psi(2^k x-j) : k, j \in \mathbb{Z}\ \}.$$

这个函数族 W 构成了 $L_2(\mathbb{R})$ 空间的一个正交基，这意味着 $L_2(\mathbb{R})$ 空间中的任何函数 f 都可以使用 W 中的函数进行精确的重构：

$$f=\sum_{\eta\in W}\langle f,\eta\rangle\eta,\quad \forall f\in L_2(\mathbb{R}),$$

其中 $\langle f, \eta\rangle$ 表示函数 f 和基函数 η 的内积，反映了通过 η 对 f 的采样，且 W 中任意两个不同的元素之间的内积为 0。这种重构性质对于图像恢复来说至关重要，并且 W 的正交性也是后来小波被广泛用于图像压缩的一个重要的性质。

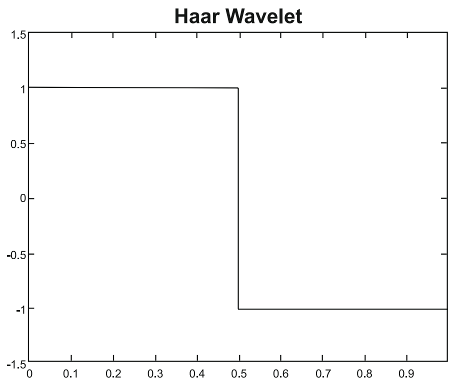

图 1. 哈尔小波函数

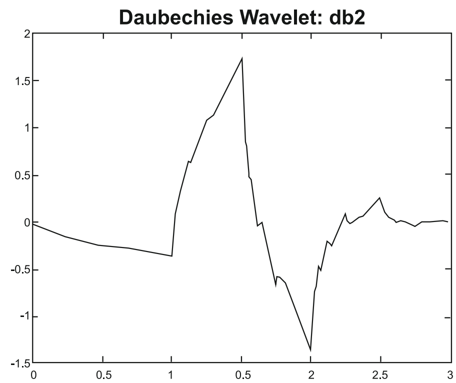

图 2. 道贝希斯提出的 db2 小波

哈尔是小波分析领域的先驱之一。哈尔小波是第一组也是最简单的一组正交小波基。这些特性使得哈尔小波在信号处理、图像处理、数据压缩等众多领域都有着广泛应用。哈尔小波的诞生标志着小波分析理论新时代的开启，对随后正交小波、双正交小波和小波框架理论的发展产生了重大影响。

在测度论方面，哈尔同样做出了卓越贡献。1910 年，他提出的哈尔定理和哈尔测度为测度论的发展奠定了坚实的基础。哈尔的这些开创性工作不仅推动了现代数学的多个分支，也对整个数学研究领域产生了深远影响。1928 年，哈尔在意大利举行的国际数学家大会上作了 45 分钟邀请报告。[3]

[3] 国际数学家大会是数学界最重要的盛会之一，通常每四年举办一次，汇集了来自世界各地的顶级数学家。大会设置多个报告专场，其中包括大会报告（1 小时）和邀请报告（45 分钟）。此外，大会也会颁发多项重要奖项，如菲尔兹奖、高斯奖等，以表彰数学研究中做出卓越贡献的数学家。国际数学家大会对推动数学发展起着重要作用，是数学交流和合作的重要平台。

1.1.2 多分辨率分析（Multiresolution Analysis, MRA）

随着 20 世纪后期电子和计算技术的飞速发展，特别是二战后，人们对信号处理技术的兴趣大幅增长。1960 年代，快速傅里叶变换的诞生标志着信号处理领域的一个重大突破。快速傅里叶变换迅速成为信号处理中的核心技术，并在处理光滑信号方面展现了卓越的性能。然而，随着时间的推进，傅里叶分析在处理非光滑或突变信号时的局限性逐渐暴露。这种局限性激发了研究人员对替代信号分析方法的探索，尤其是在 20 世纪 70 年代和 80 年代，小波分析开始获得日益增长的关注，特别是对小波在时域和频域中提供局部信息的能力。

为了克服傅里叶变换的非局部性，物理学诺贝尔奖得主维格纳（Eugene Wigner）和加博尔（Dennis Gabor）、地球物理学家莫莱（Jean Morlet）、理论物理学家格罗斯曼（Alex Grossmann）和数学家斯特伦贝里（Jan-Olov Strömberg）等人首先引入了窗口傅里叶变换（windowed Fourier transform）。为了让窗口的大小和频域有关，这样就自然引入了伸缩的概念，从而引入了连续小波变换的概念。连续小波变换在实际应用时需要对积分算子进行离散，才可以计算，但是对于一般的小波函数，离散化之后得到的系统可能是一个冗余系统，而非正交小波系统。

多分辨率分析是小波的理论和应用的基石 [4]。多分辨率分析的核心在于简化了具备理想特性小波的构造过程，使得小波变得更加易于构造和应用。这一概念不仅成为小波理论中的一个重要组成部分，也使得基于多分辨率分析构造的小波系统自然地具备了快速的正变换和反变换算法。这些算法是由小波函数对应的滤波器组组成的，通过多层次的线性滤波操作实现。多分辨率分析的这一特性不仅让小波构造变得更加容易，同时也自然地建立起离散和连续之间的桥梁，因此，通过多分辨率分析构造出的小波自然具有快速小波变换。

所谓的多分辨率分析，就是一系列嵌套的子空间，他们把完整的函数空间按照逐步升高的分辨率来划分，使得构造小波基变得更加容易。数学上来说，多分辨率分析由子空间 $V_n \subset H, n \in \mathbb{Z}$，组成，这里 H 是某个希尔伯特空间。这些子空间还要满足下述条件：

$$V_n \subset V_{n+1}, \quad \cap_n V_n = \{0\}, \quad \overline{\cup_n V_n} = H, \quad f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^n \cdot) \in V_n,$$

且 V_0 由一个函数（可细分函数，refinable function）和它的平移所张成，且这些平移之间是相互正交的 [5]。正交小波函数就是 V_0 在 V_1 的正交补空间的生成元。

[4] S. Mallat, Transactions of the American mathematical society 315, no. 1: 69-87, 1989. S. Mallat, IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence 11, no. 7: 674-693, 1989. Y. Meyer, Wavelets and Operators: Volume 1. No. 37. Cambridge University Press, 1992.

[5] S. Mallat. A wavelet tour of signal processing. Elsevier, 1999.