

神奇的拉丁方与欧拉猜想 (二)

翁林宸 彭小令 方开泰

4. 一个答案的两种命运

当一位传奇数学家提出了一个著名猜想而没有留下证明时，后来的人们可能首先需要解决的一个问题是，究竟是要证明还是推翻它？这是两个完全不同的努力方向。正如美国数学科普作家加德纳（Martin Gardner）在 1959 年回顾欧拉猜想时，为它所写的开场白那样，数学的历史总是充满着高明远见的猜想，它们源自拥有着深刻洞察力的数学家们依据自己的直觉作出的猜测，并且在被证明或者推翻之前经常需要等待几个世纪。当这一切最终发生之时，便自然而然地成为数学王国里万众瞩目的事件。

4.1. 1800s–1900s：昙花一现

回顾过去的两三个世纪，三十六军官问题和欧拉猜想吸引着人们持之以恒的探索。而欧拉自身的传奇色彩，也为整个故事增添了几分神秘感。让我们首先从三十六军官问题开始说起，它的答案最早可能出现在德国天文学家舒马赫（Heinrich Schumacher）和高斯之间的往来书信。也许很多人都知道，在第一篇故事里出现的黎曼是高斯的学生，但实际上舒马赫亦是如此。

从一封时间标记为 1842 年 3 月 12 日的信里，舒马赫向高斯送去了三个问题。当中最后一个是组合方面的问题，正是关于 n 阶希腊拉丁方的存在性。舒马赫表示这个问题对于 $n = 2$ 而言是无解的，而 $n = 3$ 的答案则很容易得到。在他的印象中，高斯之前告诉自己 $n = 4$ 也是不存在的。但是舒马赫随后附上了他的助手，丹麦数学家和天文学家克劳森（Thomas Clausen）的答案，并且询问高斯还有哪些阶数是不可能的。

1842 年 4 月 2 日高斯写信回复舒马赫，他不相信自己曾经说过 $n = 4$ 是无解的。实际上高斯还提及甚至存在满足额外条件的答案，即全部元素都能出现在两条主对角线上。然后他通过稍微改变克劳森的方法，便得到这个更加特别的答案。值得一提的是，高斯构造出的 4 阶正交拉丁方还能联系到统计里一类特殊的实验设计，后面我们将会回顾这段历史。

No. 767 Schumacher to Gauß; March 12, 1842

Ich sende Ihnen, mein theuerster Freund, ein paar Kleinigkeiten von Clausen.

.....

3) Ist eine Art magisches Quadrat. Man schreibt auf n Zettel A und bei A , die natürlichen Zahlen von 1 bis n , ebenso auf n Zettel B und die natürlichen Zahlen von 1 bis n , und so fort bis man n Buchstaben hat. Aus diesen nn Zetteln soll ein Quadrat gelegt werden, mit der Bedingung, dass sowohl in jeder horizontalen, als verticalen Reihe alle Buchstaben und alle Zahlen vorkommen. Für $n = 2$ ist dies unmöglich, für $n = 3$ leicht, und ich glaubte früher von Ihnen verstanden zu haben, dass es auch für $n = 4$ unmöglich sei, muss mich aber geirrt haben, da Clausen mir beifolgende Auflösung brachte. Darf ich fragen, wenn sonst die Untersuchung Ihnen keine Mühe macht, für welche Werthe von n (das nur eine ganze Zahl seyn kann) es unmöglich ist ?

Ihr ewig dankbarer H.C. Schumacher.

1842. März 12.

(Einlage 3.)

$$\begin{pmatrix} A_4 & B_1 & C_2 & D_3 \\ C_1 & D_4 & A_3 & B_2 \\ D_2 & C_3 & B_4 & A_1 \\ B_3 & A_2 & D_1 & C_4 \end{pmatrix}$$

一封来自 1842 年 3 月 12 日的信 (Gropp, 1995)¹

No. 768 Gauß to Schumacher; April 2, 1842

Von den verschiedenen Clausen'schen Sachen, die Sie, mein theuerster Freund, in einem Ihrer letzten Briefe mitgetheilt haben, habe ich nur der dritten einige Minuten zuwenden können. Dass ich jemals behauptet haben sollte, die fragliche Aufgabe werde für $n = 4$ unmöglich, kann ich schlechterdings nicht glauben, da man sogar beim ersten Blick erkannt hat, dass Hr. Clausen die Bedingungen sogar noch zu enge gestellt hat. Man muss nemlich noch die beifügen, dass auch in den beiden Diagonalen alle ABCD und alle 1234 vorkommen sollen, was in dem von Ihnen mitgetheilten Diagramm nicht zutrifft, aber sehr leicht zu erreichen ist. Z.B. (die erste Zeile nach Clausen beibehaltend)

$$\begin{pmatrix} A_4 & B_1 & C_2 & D_3 \\ C_3 & D_2 & A_1 & B_4 \\ D_1 & C_4 & B_3 & A_2 \\ B_2 & A_3 & D_4 & C_1 \end{pmatrix}$$

.....

Stets der Ihrige C.F. Gauß.

Göttingen, 1842. April 2.

一封来自 1842 年 4 月 2 日的信 (Gropp, 1995)¹

仅仅过了 3 天之后, 舒马赫在 1842 年 4 月 5 日写给高斯的回信里说道, 他依然相信高斯原先告知自己一些阶数的不存在性。舒马赫现在认为这件事情发生在 1826 年的德国哥廷根, 并且问道 $n = 2$ 是否为唯一不可能的情况。

¹ H. Gropp. "Gaußsche Quadrate" or Knut Vik designs—the history of a combinatorial structure. In Behara, M., Fritsch, R., and Lintz, R. G., editors, Proc. 2nd Gauss Symposium. Conference A: Mathematics and Theoretical Physics, De Gruyter, Munich, 8(2-7), 1993, pp. 121-134.

No. 769 Schumacher to Gauß; April 5, 1842

..... Vielen Dank für Ihre Belehrungen über die Quadrate mit doppelten Elementen. Eine Frau v. Rosenkranz in Kopenhagen beschäftigte sich damit, und ich meine, dass Sie 1826 bei meiner Durchreise durch Göttingen, mir Fälle genannt hätten, bei denen das Problem unmöglich sei, namentlich meinte ich dies für $n = 4$, aber ich kann mich sehr gut irren. Ist $n = 2$ denn der einzige unmögliche Fall ?

.....

Ihr ewig dankbarer H.C. Schumacher.
Altona, 1842. April 5.

一封来自 1842 年 4 月 5 日的信 (Gropp, 1995) ¹

大约经过 4 个月和 13 封信之后，他们再度聊到这个问题。在 1842 年 8 月 10 日的信里，舒马赫向高斯表示克劳森通过将全部可能的 6 阶拉丁方简化成 17 类来证明 6 阶正交拉丁方的不存在性。尽管他们并不知道欧拉在此之前的工作，但是相同的剧情再度上演，克劳森也猜测所有满足阶数为 $4k + 2$ 的正交拉丁方都不存在。可是他不仅当时无法给出证明，甚至不相信自己将来能够实现。回想起关于 6 阶情况的证明，克劳森认为：若是通过同样遍历的方式证明 10 阶正交拉丁方也不存在，对于人类的力量而言可能是不切实际的。但更具戏剧性的一幕是，舒马赫在最后的回忆里写道：也许高斯之前说的正是 6 阶正交拉丁方的不存在性。可惜他们的研究工作都未曾发表，三十六军官问题迎来的一丝曙光因而转瞬即逝。

No. 782 Schumacher to Gauß; August 10, 1842

..... Clausen ist noch hier, und wird erst in 14 Tagen reisen. Er hat unterdessen über die magischen Quadrate mit doppelten Characteren gearbeitet, deren Sie sich wohl aus unserer Correspondenz vor etwa einem halben Jahre erinnern (z. B. aus 9 kleinen, mit $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ bezeichneten Quadraten ein Quadrat zusammenzusetzen, in dem jede Horizontal- und Verticalreihe alle Buchstaben und alle Zahlen, aber keinen Character mehr wie einmal enthält) und kann beweisen, dass dies für 6 (6 Buchstaben und 6 Zahlen) unmöglich ist, ebenso wie für 2. Er bringt für 6 alle möglichen Fälle auf 17 Grundformen, deren Discussion die Unmöglichkeit ergibt.

Sie haben mir früher auch eine Zahl genannt, bei der es nicht möglich war, (obgleich Sie sich der Sache nicht mehr erinnern), dies wird auch 6, und nicht 4, wie ich irthümlich glaubte, gewesen seyn. Ich meine es war 1817, bei meiner Durchreise nach München. Clausen vermuthet, dass es für jede Zahl von der Form $4n + 2$ unmöglich sei, kann es aber noch nicht beweisen, und glaubt auch nicht, dass ihm überhaupt der Beweis gelingen wird, da nach seiner Meinung die Auflösung dieser Aufgabe mit der Theorie der Combinationen und deren Anwendung auf die analytische Auflösung der algebraischen Gleichungen sehr nahe zusammenhängt. Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar seyn.....

Ihr ewig dankbarer H.C. Schumacher
Altona, 1842. August 10.

一封来自 1842 年 8 月 10 日的信 (Gropp, 1995) ¹

当欧拉的第一篇论文在 1849 年重新发行时，再一次激发起人们对三十六军官问题的兴趣。到了 19 世纪 90 年代，这些未解之谜已经声名远扬，仅是在古老的数学期刊 *Intermédiaire des Mathématiciens* 上就涌现出整整 10 篇相

关主题的论文。人们总说好事多磨，三十六军官问题在尘封百年之后最终得到了幸运女神的眷顾。

1900 年法国数学家塔里 (Gaston Tarry) 正式发表了 6 阶正交拉丁方不存在的完整证明，象征着 20 世纪这一崭新时代的开启。欧拉在他的第二篇论文里这样写道：倘若真的存在满足阶数为 $4k + 2$ 的正交拉丁方，那么它和我们之前所考虑的那些相比肯定是非同寻常的。因此研究 6 阶拉丁方所有可能的情况是很有必要的，即使毫无疑问它的数量是个天文数字。这么看来，通过遍历全部的可能性，塔里确实完成了 118 年前欧拉所提出的要求。但是他并非盲目地逐一验证每个可能的 6 阶拉丁方，而是首先研究了一类更加特殊，被称之为 reduced Latin square 的拉丁方，其中首行首列都依照自然顺序进行排列。例如一个 n 阶 reduced Latin square 的第一行和第一列都是由元素 $0, 1, \dots, n - 1$ 依次构成。当塔里完整遍历 9408 个不同的 6 阶 reduced Latin squares 之后，又将它们分成了 17 类并且证明这些 6 阶拉丁方都不能组合成 6 阶正交拉丁方，最终三十六军官问题迎刃而解。如此看来，塔里的证明过程显然为克劳森的贡献增添了几分可信度。

而塔里的成功也激励着人们开始寻找更加巧妙的证明方式，一系列不同版本的证明随之诞生。1934 年费舍尔 (Ronald Fisher) 和英国统计学家耶茨 (Frank Yates) 展示了一个十分简洁的答案。首先他们 also 把 9408 个可能的 6 阶 reduced Latin squares 整理为 17 类，这和克劳森以及塔里的工作如出一辙。然而费舍尔和耶茨对拉丁方拥有更加深刻的见解，他们观察到拉丁方存在一些不变的对角性质。相比起来，欧拉在 1782 年的工作中虽然也用到相似的变换方法，但是并未涉及这一绝妙性质。可能因为这个原因，他不能将所有的可能性降低到更小的数量。即使已经验证了大量情况，恐怕仍然只是冰山一角，无奈之下只能遗憾地放弃寻找答案。最后，费舍尔和耶茨甚至进一步将这些 6 阶拉丁方简化成 12 种不等价的类型，然后验证两两之间都不能正交，更加轻松地完成证明。对于三十六军官问题，他们留下这样一句评论：想当初欧拉若是意识到 6 阶拉丁方的简化形式 (reduced form) 只有 9408 种可能性，且经过一定变换的简化之后，它们的数量甚至能降低至原先的百分之一，或许他得到的不仅仅是一个可能的结论。

在短暂沉寂二十年之后，全球再度掀起了三十六军官问题的研究热潮。从 20 世纪 50 年代开始至今，每隔十年都有新的证明发表，而且作者来自世界各地，至少包括日本、俄罗斯 (曾经的苏联时期)、德国、加拿大、美国、英国、希腊和南非的数学家们。当中层出不穷的证明思路涌现出来，例如设计理论 (design theory，也称组合设计理论，combinatorial design theory)，编码理论 (coding theory，亦称代数编码理论，algebraic coding theory)，线性规划 (linear programming) 和图论 (graph theory)，其中以加拿大数学家斯廷森 (Douglas Stinson) 短短 3 页纸的证明最为简短而又优美。看着本世纪 10 年代的奇思妙想如期而至，不禁令人期待万分，在下一个十年里我们是否还将迎来属于 20 年代的惊喜呢？

随着三十六军官问题的告一段落，更多目光纷纷开始落在深奥的欧拉猜想上面。然而命运女神再度和数学家们开起了玩笑。自从塔里成功实现突破之后，许多渴望征服欧拉猜想的尝试都失败了。数学家们在宣布和推翻证明的不断交替之中度过了 20 世纪初。

4.2. 1900s-1920s : 扑朔迷离

1902 年丹麦数学家彼得森 (Julius Petersen) 因为不满意塔里的长篇证明，想要为 6 阶正交拉丁方的不存在性提供一个简短的几何解释。可是他的方法好像受到了诅咒，分别被塔里和另外两位德国数学家威尼克 (Paul Wernicke) 以及莱维 (Friedrich Wilhelm Levi) 发现是错误的。即使经过数十年，厄运依然久久不愿散去，仿佛阴霾一般笼罩在古老猜想的上空。

1910 年威尼克尝试使用代数里的群论方法解决三十六军官问题，然而美国数学家麦克尼希 (Harris Franklin MacNeish) 和德国数学家维特 (Ernst Witt) 还是指出他的漏洞所在。加拿大裔美国数学家和计算机科学家，2003 年欧拉奖得主科尔伯恩 (Charles Colbourn)，以及美国数学家迪尼茨 (Jeffrey Dinitz) 编纂的《组合设计指南》(*Handbook of Combinatorial Designs*) 是组合数学的权威著作之一，他们在书里回顾了设计理论从起源到 20 世纪 50 年代之间的漫长历史。从 2006 年的第二版书中可以看到，实际上彼得森和威尼克显得更加野心勃勃，因为他们甚至想要完整地证明欧拉猜想。

正如威尼克之于彼得森，当麦克尼希推翻威尼克的证明后，也曾试图通过群论视角彻底结束欧拉猜想的命运。但是他的答案依然被莱维证实并非正确。更加令人感到意外的是，麦克尼希这篇题为欧拉方 (Euler's squares) 的论文甚至出现在 1922 年的《数学年鉴》上面。一系列的谬证如同光影交错般扑朔迷离，究竟是什么原因让这些数学家们一次次地重蹈覆辙呢？

4.3. 1920s : 烛光摇曳

为了穿越眼前的层层迷雾，回顾最初的一些重要工作可能是最佳方式。我们的思绪追溯至美国数学家摩尔 (Eliakim Moore)，作为最重要的领导者之一，他为美国数学学派的蓬勃发展作出了杰出贡献。1896 年摩尔发展了全新的代数方法，并且得到一些关于正交拉丁方的结果。一方面他通过有限域 (finite field)，亦称为伽罗瓦域 (Galois field)，来构造素数幂阶的正交拉丁方，另一方面他也证明了不同阶数的正交拉丁方之间存在着关系。或许由于摩尔并非通过拉丁方的术语进行表达，导致这些结论很长时间都寂寂无闻，直到很多年之后才被人们重新发现。实际上，这些结论潜藏着解开欧拉猜想的部分秘密，只是尚未被真正意识到。接下来，让我们为摩尔逐一构建起这些千丝万缕的联系。

也许很多人都不知道，在此之前出现的麦克尼希正是摩尔的学生。在 1922 年的工作里，麦克尼希的重要贡献是将直积 (direct product, DP) 这一概念引入拉丁方的研究中。简而言之，他把一对 n 阶和 m 阶的拉丁方结合起来，构造出一个 nm 阶的拉丁方。