平凡结与三叶结

刘洋洲

许多数学家都是户外登山爱好者。其实数学亦是群山，只是数学的风光，既在山峦叠嶂，亦在花草之间。本文采用步步为营的方式，向读者逐一介绍各种简单的纽结。强烈建议读者身边准备一条软绳（比如鞋带），随时准备应对来自本文的挑战。一边阅读，一边动手，如此阅读体验相信并不多见。

1 平凡结不平凡

1.1 纽结同痕

所谓纽结，是指三维空间内不自交的绳圈。纽结在平面的投影图显然更方便观察研究，我们称纽结的投影图为纽结图（diagram）。值得注意的是，纽结与纽结图的区别：同一个纽结可以拥有不同的投影图。

最简单的纽结，就是平凡结（unknot）。因为它最简单、最平凡，英文直译的话，就是未（un-）打结（knot）的结。或许读者会认为，平凡结最不需要介绍，不就是一个圆嘛。这句话对，也不完全对。圆只是平凡结的标准图像，但事实上所谓“标准图像”，完全是人为规定。例如，图 1 右边的纽结，如果我不说，相信读者很难立即意识到，其实它也是一个平凡纽结。请读者使用手边的绳线验证，寻找解绳之法。

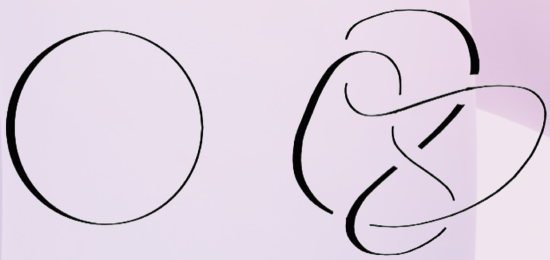

图 1. 两个纽结有何共同之处？

可见，尽管是平凡结，但依然可以一团乱麻（图 1 的示例已经很简单了）。当我们开始这个游戏的时候，自然就会遇到一个问题——如何去记录我们解答的过程，如果你不打算绳子一甩，绳子碰巧自行解开的话。

一个好的解答的过程，应该像一格一格的漫画，记录着纽结每一次局部变化的关键帧。通过前后帧的对比，使我们很容易辨认每一步的具体操作，从而还原整个过程，也方便他人快速读取。读者可以试着画下您的解答过程。

记录纽结变化的过程，此事看似很普通，实则不然。其背后蕴含的想法是：摆弄纽结的操作，可不可以规范化，甚至编码化？只要约定好几种固定的操作，排序编号，接下来只要报数，就可以机械操作（电脑编程），节省脑力，岂不妙哉？

赖德迈斯特帮我们实现了这一想法：我们只需要三种操作就够了。而每一种操作，即使是小朋友也一望便知。这三种操作统称为赖德迈斯特移动（Reidemeister moves），或者也称为纽结初等变换，分别记为 R1、R2、R3，见图 2。

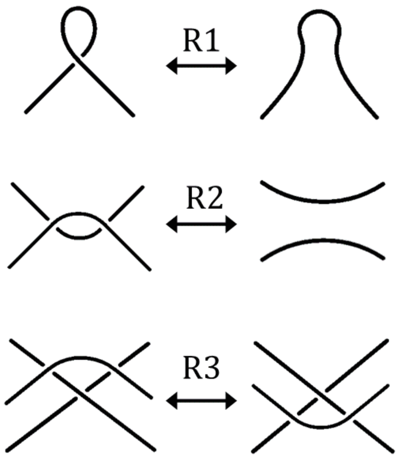

图 2

定理 1（Reidemeister） 若两个纽结相同，当且仅当经过有限次初等变换后可相互转换。

两个类型相同的纽结，我们称之为同痕（ambient isotopy）[1]。有了这个定理，今后我们说两个纽结同痕，就是指两者可以通过有限次初等变换互相转化。该结论的重要性不言而喻，虽然其证明并不困难[2]，但是未免有些琐碎。大致的思路是讨论由折线段构成的纽结，如此一来，只需要分别讨论如何移动这些首尾相接的火柴棍即可。

讲到这里希望你还没有昏昏欲睡。好，我们开始一个小游戏。

游戏 1 请用赖德迈斯特移动说明，图 3 中两个纽结相同（同痕）。

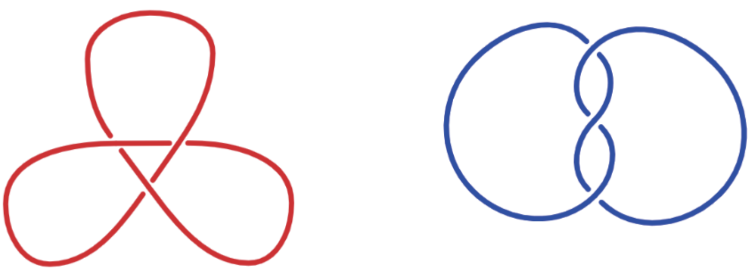

图 3 . 三叶结的不同样貌

[1] 同痕的原始定义是：存在随时间参数 $t \in [0, 1]$ 改变的光滑嵌入：F_t:$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$，使得 $F_0(\mathbb{S}^n) = K_0$, $F_1(\mathbb{S}^n) = K_1$。我们称 F_t 为同痕变换，K_0 与 K_1 两者同痕。直观来讲，同痕的纽结可以通过移动相互转化，前提是不允许剪断纽结，也不允许移动的过程中发生自交。

[2] Manturov V. Knot theory, Chapter 2 2004.

1.2 交叉数

毫无疑问，交叉点是纽结最重要的特征。而一个纽结的投影图所能达到的最小交叉点数——交叉数（crossing number），反映了该纽结的复杂程度。图 3 向我们展示了这样一个事实：同一纽结的不同形态，都可以达到其交叉数。纽结理论之肇始——泰特（P. G. Tait），花费数十年时间，制作了人类历史上第一张纽结列表，如图 4 所示。

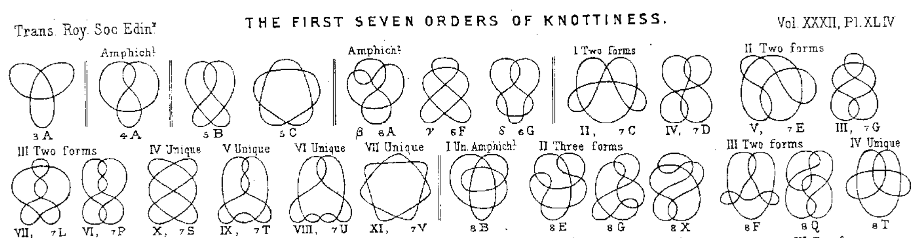

图 4. 泰特纽结列表局部

平凡结交叉数为 0 自不必说，但您是否注意到，为什么纽结列表中没有交叉数为 1 和 2 的纽结？平凡结（0）后面紧接着就是三叶结（3），它们中间的纽结去哪了？而其他交叉数似乎都有相应的纽结存在，这是一个不寻常的 gap（间隔）：

$$0, 3, 4, 5, 6, \cdots\cdots$$

突如其来的间隔，破坏了自然数的连续性。史强警官[3]有句名言：邪乎到

[3] 著名科幻作家刘慈欣的经典作品《三体：黑暗森林》中的主要人物。

家必有鬼！福尔摩斯亦对反常现象极为敏感，由此推敲下去，便有了一次次令人拍案叫绝的名推理。这同样是数学家乃至科学家的研究法门。

也许读者早已发现，交叉数不超过 2 的纽结，事实上都可以解开。请您使用手边的绳子进行实验验证。若想要严格说明这件事情，虽然不难，但有些繁琐。

当纽结仅有 1 个交叉点时，如图 5，我们只需把这个“十”字的四个端点分别连起来，形成闭合曲线即可（注意连接的过程中不要形成其他的交叉点）。你会发现连接方法只有 13 和 24 或者 14 和 23（为什么？），形成 8 字形（见图 6 左帧），利用纽结的第一种初等变换，就可以消除这个纽结的唯一的交叉点。

当纽结仅有 2 个交叉点时，则我们将两个十字连接在一起构成纽结，图 3 我们给出一种看似复杂的连接的示例。由于连接不能产生额外的交点，所以可以排除许多无意义的连接方式。总之，这样的连接方法一定是有限的，我们只需要逐一验证即可。验证的工作就留给读者了。

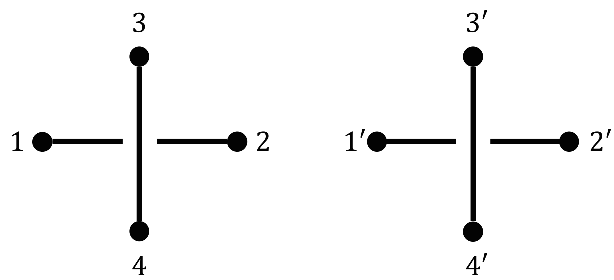

图 5

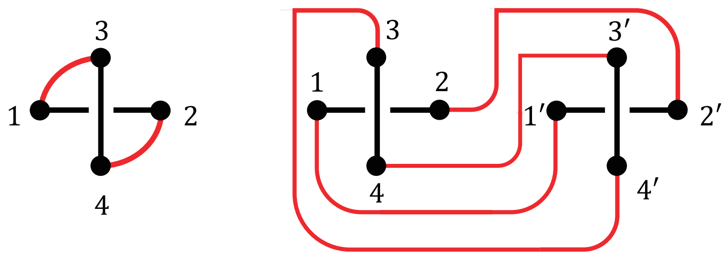

图 6

确定一个纽结的交叉数，绝非易事。同一类型的纽结，其投影图何其多也，岂能穷尽？然而有一类纽结，或者说一类特定的投影图，一旦实现，就达到交叉数最小值。它就是交错结。所谓交错结（alternating knot），就是从纽结任意一点沿某方向出发，绳线依次经过各个交叉点时，上越下穿，交错进行，下文所要介绍的三叶结，正是交错结。

交错结的交叉点极小的性质，被纽结理论的创始人泰特一早便关注到，经过大量实验验证，但直到先进的工具（琼斯多项式）诞生后，才得以证明——

定理 2（Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite）

一个纽结存在一个简约的[4]交错结投影，它的交叉数就是当前投影图的交叉数。

1.3 解结数

接下来的问题更具挑战性。什么样的纽结只需要改变一个交叉点，就会得到平凡结？或者更一般地，在纽结的所有投影图中，至少改变几次交叉点，会解开成为平凡结？这个数字被称为解结数（unknotting number），我们用记号 $u(K)$ 来表示。这个数字度量了任何一个纽结和平凡结的亲疏关系，其中 $u(K) = 1$ 的纽结是平凡结的直系血亲。

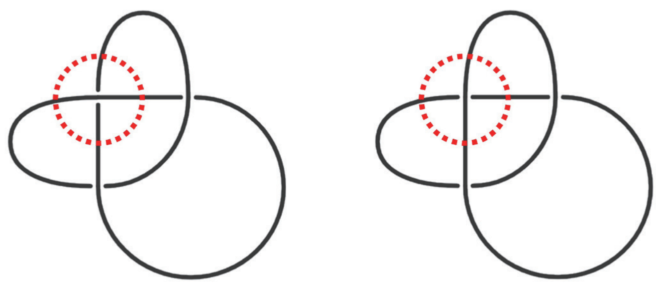

图 7. 左帧为三叶结，将红圈中的交叉点类型改变，得到右帧

如图 7，改变三叶结任意一个交叉点，都会得到平凡结，即三叶结的解结数是 1，可记为 $u(3_1) = 1$。读者大可对着附录纽结表探索一番，试着找找哪些纽结的解结数是 1。当纽结交叉数较大时，这确实具有挑战性，因为我们只能逐一尝试改变每个交叉点，改变后的结果甚至不可预料。您会发现，纽结之间以一种非常奇妙的方式联系在一起，强烈邀请读者进行实验，非常有趣！

定理 3（Scharlemann）解结数为 1 的纽结只能是素纽结。

这里我简单介绍一下什么是素纽结。任意两个纽结可以做连通和（connected sum）见下图 8。我们给两个纽结局部各开一个小口子，然后将两者连接在一起，使之成为一个纽结的手术，称为连通和，记为 $K_1\#K_2$，后者也称为复合结（composite knot）或乘积结（product knot）。如果一个纽结 K 不是任两个非平凡结的连通和，那么 K 就是素纽结（prime knot）。事实上，上述纽结列表也是一个素纽结列表。

素纽结，与素数类似，两者分别是纽结系统与正整数系统的基石。算术基本定理告诉我们：任意正整数都存在质因数分解，例如：

$$100 = 2\times2\times5\times5$$

[4] 无明显可去交叉点。