# 梅森素数（二）

Mersenne prime

蔡天新

## 第四章 从海桑到费尔马

我思，故我在。
人类的意识到达不了动物的内心。

——（法国）勒内•笛卡尔

### 10. 阿拉伯的海桑

大约在 1000 年，阿拉伯数学家海桑（Ibn al-Haytham）在对欧几里得的《几何原本》进行一番研究之后，也对完美数问题提出了自己的猜测，他认为

凡偶完美数必有形式 $2^{p-1}(2^p-1)$，其中 $p$ 和 $2^p-1$ 均为素数。　　（E）

这等同于尼科马科斯猜想 4)，即“《几何原本》中完美数的充分性也是必要的”。不过海桑并没有考虑奇完美数，同样他也无法给出证明。海桑出生巴士拉（今伊拉克南部港市和第二大城市）。我们无法得知，海桑是否受到过尼科马科斯的影响，不过倒是可以确认，毕达哥拉斯在埃及逗留时曾被波斯人俘虏到巴比伦，即两河流域的美索不达米亚，当时正处于波斯人的统治之下。

这让我们想起非欧几何学的那些早期探索者，也是几位阿拉伯或波斯的数学家，例如 11 世纪的诗人海亚姆（Omar Khayyam）和 13 世纪的纳西尔丁（Nasir al-Din）。巴士拉位于底格里斯河和幼发拉底河汇合之后的阿拉伯河南岸。说到阿拉伯河，后半段是伊拉克和伊朗的界河，北岸有伊朗最主要的港口阿巴丹，它位于巴士拉下游 50 公里处。

海桑也是中世纪最重要的物理学家，尤以光学方面的贡献最大，并有着“光学之父”的美誉。光是人类生存环境中一个不可或缺的因素。从柏拉图到托勒玫都认为，人能看见物体是靠眼睛发射出的光线被物体反射的结果。亚里士多

伊拉克 10 第纳尔纸币，上有海桑像

德对此表示了异议，他质疑如果这一理论正确的话，为何在黑暗中眼睛没有看见物体的能力？但由于欧几里得从几何学上予以解释和论证，这一理论仍得以流行。海桑对此予以纠正，他认为光是由太阳或其他发光体发射出来的，然后通过被看见的物体反射入人眼。

当太阳和月亮接近地平线时，它们的直径明显地变大。海桑断言这是一种幻觉，是太阳或月亮离地面的距离接近造成的。虽然这种解释没有被普遍接受，但它在今天仍然十分流行。海桑还对光的入射角和折射角进行了测量，推翻了托勒玫的论断，即入射角与折射角之比是常数的说法。尽管海桑给出了两个角同处一个平面的条件，但他并没有发现折射定律，即这两个角的正弦之比，等于其介质的折射率比值的倒数。有了折射定律，几何光学的精确计算终于成为可能。

折射定律最早是由荷兰莱顿大学的数学教授斯涅耳（Willebrord Snellius）依据实验发现的，那是在 1621 年，可是他并没有发表。直到斯涅耳去世多年以后，他的同胞物理学家惠更斯（Christiaan Huygens）等人在审查他遗留的手稿时，才看到这方面的记载。1678 年，惠更斯出版《论光》，在发表他本人光的波动学说之外，也将斯涅耳的折射定律公之于众。而此前在 1637 年，法国人已从理论上独立推断出这个定律。

海桑生前被尊称为“巴士拉先生”“物理学家”，他生活的时代巴士拉属于白益王朝（Buwayhid dynasty），那是在阿拉伯人的征服和突厥人的征服之间，由里海沿岸的德莱木人酋长白益和他的三个儿子创立，到第三代时达到鼎盛，疆域包括今天的伊朗西部和伊拉克，主要城市有设拉子、伊斯法罕和巴格达。白益人喜爱精致的银器，陶器多饰以红底白条，白益艺术的波斯特色使得后来的塞尔柱人和蒙古人为之倾倒。

然而，海桑的学术生涯主要是在开罗度过的，他给贵族人家做家庭教师，生活并非总是如意。一次埃及哈里发召集他参与调控经常泛滥的尼罗河水，当海桑明白那需要在尼罗河上游建一个大水坝，而这项任务在那个年代无法完成以后，他对自己的生命感到了担忧，便装疯卖傻直到哈里发去世，其中有 10 年被监视居住。正是在那段时间里，他写成了《光学之书》（*Book of Optics*），并对数论进行了一番研究。值得一提的是，1970 年，在苏联专


白益王朝的骑兵

家帮助下，埃及终于建成了阿斯旺水坝。

更为难得的是，海桑在开罗的艾资哈尔大学讲课时，还率先提出了“科学方法”（scientific method）的概念，他因此被认为是“科学方法论之父”。艾资哈尔大学于 988 年正式开办招生，是世界上最古老的大学之一。毕业于莱顿大学法学院的波兰天文学家赫维利乌斯（Johannes Hevelius）在他的《月球书》（1647）中指出，海桑代表着理性，而伽利略代表着感性。

与此同时，海桑也被视作精神物理学和实验心理学的先驱。他还是第一个描绘人眼的科学家，依据的是解剖学上的理论，如今眼科的某些术语起源于译成拉丁文的海桑的著作。例如，视网膜、角膜、玻璃体、前房液，等等。毫无疑问，海桑是古代阿拉伯世界罕见的一个全才。

不过，要看到海桑关于完美数的猜测被证明，还需要再等待 7 个半世纪。而尼科马科斯关于奇完美数不存在和完美数无穷性的猜想，即便在 21 世纪的今天仍遥不可及。值得一提的是，比海桑稍晚的埃及数学家法鲁斯（Ismail ibn Fallus）曾经给出了第 5、第 6 和第 7 个完美数，但由于他夹杂着其他后来被证明是错误的完美数论断，故而不被西方同行承认。这三个完美数的确认要等到 15 和 16 世纪，请见下文。

### 11. 意大利的卡塔尔迪

第 5 个完美数的出现姗姗来迟，差不多相隔了 13 个半世纪，横跨了中世纪的黑暗时代。直到 15 世纪，确切地说，是在 1456 年和 1461 年间，才由一位无名氏发现的。这项工作记载在前文提及的 1536 年出版的英国人莱吉乌斯的著作《算术掠影》里，而从已有的数学文献来看，之前的 4 个完美数均首先


带斜线的 $1 = X$

出现在埃及或中东，即地理上的非洲和亚洲。

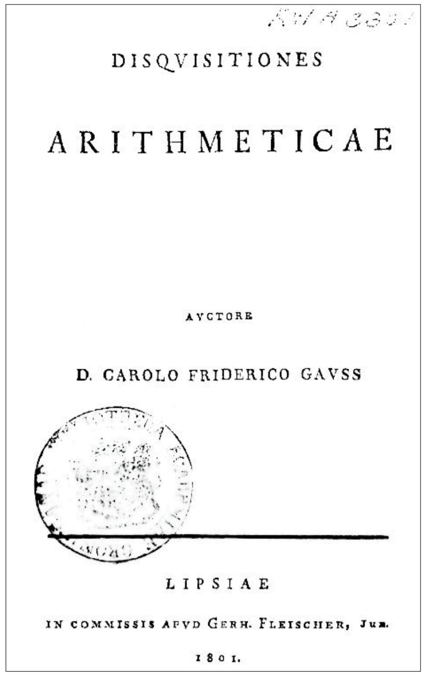
这第 5 个完美数是一个 8 位数，对应于（E）中 $p = 13$，即

$$2^{12}(2^{13} - 1) = 33,550,336.$$

但是，这还是不能推翻尼科马科斯的猜测 1)，即第 $n$ 个完美数是 $n$ 位数。因为有可能存在遗漏的完美数，也就是说，在第 4 个完美数和第 5 个完美数之间可能有别的完美数。另一方面，因为莱吉乌斯没有记下发现者的名字（可能他本人并不知晓），我们也无法判断这个人到底是欧洲人、亚洲人还是非洲人。

1588 年，博洛尼亚的意大利数学家卡塔尔迪（Pietro Cataldi）找到了第 6 个完美数 8589869056 和第 7 个完美数 137438691328，分别对应于（E）中 $p = 17$ 和 $p = 19$。至此，完美数研究的领先优势终于可以确定来到欧洲。与此同时，卡塔尔迪还率先证明了，用欧几里得的充分条件得到的完美数必以 6 或

卡塔尔迪像


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

高斯《算术研究》初版扉页

8 结尾。这个证明在今天看来是非常容易的，只需要利用初等数论的同余性质。

下面我们先给出同余的定义。给定一个整数 $m > 1$，把它叫做模。如果用模 $m$ 去除任意两个整数 $a$ 和 $b$ 所得的余数相同，那么我们就说 $a$ 和 $b$ 对模 $m$ 同余，记作

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

如果余数不相同，就说 $a$ 和 $b$ 对模 $m$ 不同余，记作 $a \not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$。这其中，同余的符号“≡”是由德国数学王子高斯于 1801 年在他的处女作《算术研究》中率先引进的。由于这一符号的出现，使得探讨整除和余数之类的问题变得轻松和明晰。但对完美数个位数的确定，即便不用高斯的同余符号，证明也是容易的。

按照 1919 年出版的迪克森（L. E. Dickso）3 卷本《数论史》（*Theory of Numbers*）首卷的描述，在尼科马科斯和卡塔尔迪之间，至少有 19 个人声称自己找到了第 6 个完美数，而第 7 个完美数所包含的那个梅森素数为

$$M_{19} = 2^{19} - 1 = 524287,$$

在此后将近两个世纪里一直是人类所知最大的素数。需要提及的是，迪克森任教于芝加哥大学，是物理学家杨振宁先生父亲杨武之先生的博士指导老师。

同样值得一提的是，1557 年，德国数学家斯切波尔（Johannes Scheubel）在翻译出版《几何原本》德文版时，已经发现第 6 个完美数并加了脚注，但这件事直到 1977 年才为我们所知。因此，发现第 6 个完美数这项荣誉通常要归意大利人卡塔尔迪。德文版比利玛窦和徐光启的中文版早了半个世纪，但仍晚