

寻真理于大小之间

专访 2019 年度求是杰出青年学者奖获得者郭帅

■ 文章来源：北京大学数学科学学院官方微信公众号 采访作者：季策



编者按

2019年9月21日，2019年度“求是”奖颁奖典礼在清华大学举行。北京大学数学科学学院数学系副教授郭帅获得本年度“求是杰出青年学者奖”。郭帅曾于2011年至2013年在北京国际数学研究中心从事博士后研究，合作导师为田刚院士。这是从数学中心博士后队伍中走出去的第二位“求是杰出青年学者奖”获奖人。此前，2016年，同样曾在数学中心从事博士后研究工作的关启安也获得了这一重要奖项。

郭帅，2006年于清华大学获学士学位，2010年赴美国普林斯顿大学访学一年，2011年于清华大学获博士学位。2011年开始在北京大学北京国际数学研究中心从事博士后研究，2013年入职北京大学数学科学学院工作，2016年至今任副教授。郭帅的研究方向是拓扑弦理论中的数学问题，这是近年来基础数学中比较热门的一个分支。

从现象到结构

和很多数学工作者一开始就只倾心于数学不同的是，少年时期的郭帅对物理也很有兴趣。中学时期参加过数学和物理竞赛的他，在面临大学的专业选择时有些犹豫。数学和物理都是理科生的浪漫，哪个都不想放弃，在招生组的宣传下，他选择了清华大学的基础科学班，接受数学和物理两方面的训练。在学习过程中，他发现和自己高中阶段的想象并不相同，物理在很大程度上是重视实验的学科，如黑洞、超弦等偏纯理论的物理并非主流。大学的实验课也让他很难适应。他逐渐意识到更吸引自己的其实是物理中的数学结构。这种感觉在中学时代就已经产生，高中物理中最吸引他的部分就是麦克斯韦方程组描述的电磁场理论，这是一种具有优美对称性的经典场论。他有一个简单的信念，就是物理现象不应该是凭空产生的，它背后应该有深刻而动人的数学结构。在研究生阶段，他最终选择了被称为数学物理的研究方向，这是一个近几十年来刚刚兴起但非常活跃的数学分支。

博士期间，郭帅的导师周坚教授希望他能做和自己不一样的方向。在导师的建议下，他开始进行顶点算子代数相关的研究，虽然和目前所做的 Gromov-Witten 理论不太一样，但收获很多。郭帅通过研读 Borisov 等人文章，对顶点算子代数和镜像对称有了一些自己的理解。借此他完成了自己的博士论文——用顶点算子代数的形变去实现 Orbifold 超曲面的 Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 对应。这期间对很多早期物理文献的深入发掘，也对他博士毕业之后开始独立工作有很大帮助。此外在博士期间，郭帅作为公派联合培养博士到普林斯顿大学交换，在田刚教授的指导下学习了一些热带几何（tropical geometry）的内容。普林斯顿良好的学术氛围和交流环境让他印象深刻。

从半单到非半单

凭借在博士期间的积累，郭帅意识到自己对整个领域已有比较完整的认识。



来到北大之后，郭帅逐渐开始独立探索和思考一些他之前在阅读物理文献过程中希望解决的数学问题。镜像对称这一领域所关心的问题，起源于物理学家 Candelas 等人对亏格 0 的镜像对称的猜想。他们通过超弦理论中的对称性，成功预言了最典型的 Calabi-Yau 三维流形——五次超曲面上任意有理曲线的条数。这个计数问题的预言引起了数学界对超弦理论的极大兴趣。亏格 0 的镜像对称猜想随后被 Givental 和连文豪 - 刘克峰 - 丘成桐独立证明。对更高亏格的情形，物理学家 Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa 通过费曼积分的方法，给出了比较明确的高亏格镜像对称的物理模型，即 BCOV 理论。作为应用，BCOV 通过固定边界条件给出了亏格 1 和亏格 2 的镜像对称猜想。这个理论的几个结构性预言被认为是镜像对称的核心问题之一，但它的原始版本，即靶流形为紧的 Calabi-Yau 三维流形的情况在很长一段时间看不到数学证明的希望。数学家们先开始从其他模型尝试攻克这个问题。与局部 Calabi-Yau 三维环簇相关的拓扑顶点理论、Donaldson-Thomas 理论，与射影球面和椭圆曲线相关的 Hurwitz-Hodge 理论等一系列重要对应逐渐被建立起来。这些理论本身产生了很多重要的结果。菲尔兹奖得主 Okounkov 的获奖重要工作便包括建立三维环簇的 Gromov-Witten/Donaldson-Thomas 对应以及完全解决一维情形的 Gromov-Witten 不变量的计算问题。

刚开始郭帅考虑的是局部 Calabi-Yau 三维流形的 Gopakumar-Vafa 不变量的计算问题。该不变量某种意义上是古典的计数问题的真正推广，它们被猜想都是整数。其几何定义到现在并不清楚，只能通过 Gromov-Witten 不变量加上特定的变换被间接定义。物理学家猜想这些不变量在亏格相对于次数较大的情况下可以解释为某种 Hilbert Scheme 的欧拉示性数，该猜想被称之为 Katz-Klemm-Vafa 猜想。通过对多个例子的计算，郭帅找到了李骏 - 刘克峰 - 刘秋菊 - 周坚发展的拓扑顶点公式中存在的一种简单特性，从而和周坚合作证明了任意的 Fano 环曲面的 Katz-Klemm-Vafa 猜想，并对于该猜想以外的情况也给出了修正公式。

根据 Givental 的理论，局部的 Calabi-Yau 三维流形的亏格 0 理论定义的 Frobenius 流形为半单的。Teleman 的分类定理对任意具有半单 Frobenius 流形结构的 CohFT 给出了标准的算法。然而对于数学家也是物理学家最关心的紧致 Calabi-Yau 三维流形的情况，其 Frobenius 结构不是半单的，这也是多年来数学家在此问题上停滞不前的主要原因之一。近些年来，Kim 和他的合作者通过发展 Marian-Oprea-Pandharipande 引入的 Quasimap 理论，再加上穿墙公式，给出一种新的证明亏格 1 镜像定理的思路。简单来讲，该理论通过修改稳定性条件推广了原有的 Gromov-Witten 理论。在阮勇斌的建议下，郭帅首先和 Dustin Ross 考虑将 Kim 等人的方法应用到 FJRW 理论以证明 Landau-Ginzburg 亏格 1 的镜像定理。在开始看来，这个工作只是一个单纯的推广。然而在具体计算中郭帅逐渐发现，这种新方法虽然起源自 Quasimap 理论，但是计算部分的核心却在于一种具有半单结构的扭理论。穿墙公式精确地给出了半单理论和真实理论之间的修正项。在郭帅和 Ross 的工作中，穿墙公式的证明使用了张怀良 - 李骏 - 李卫平 - 刘秋菊发展的 MSP 局部化方法，因此逻辑上比较两种理论得到修正公式并不需要 Quasimap 理论。这使得郭帅开始考虑用这种比较公式去尝试证明更高亏格的镜像定理。在一次到密西根大学的访问中，郭帅了解到阮勇斌和 Felix Janda 正在猜想一种新的局部化公式，这种公式更直接地联系了扭理论和真实理论。尽管该公式中出现的扭理论和之前郭帅使用的不完全相同，但凭借着之前积累的经验，郭帅与 Janda、阮勇斌合作，最终通过复杂的计算精确还原了亏格 2 的镜像定理。

从复杂到简单

在亏格 2 的镜像定理验证之后，一个自然的疑问是，该方法是否真的可以进一步解决全亏格的猜想？答案远不是那么简单。在亏格 2 的计算中，出现的扭理论十分复杂。事实上亏格 2 镜像定理证明中的计算过程需要计算机程序才能完成。受阮和 Janda 的局部化公式启发，加上一些计算经验，郭帅猜想当把该公式中的扭理论修改为他和 Ross 工作中的扭理论之后，公式的形式保持不变，仅仅其中的有效常数发生了变化。该猜想最终在陈琪乐 -Janda- 阮勇斌关于 Log GLSM 的工作中通过两种 Virtual Cycle 的对比公式实现。修改后的新局部化公式具有很多优点，一个最直接的好处是，整个计算过程变得极为简单——之前依靠计算机程序完成的亏格 2 计算，现在手算即可在半页纸内完成。更进一步，郭帅在与 Janda，阮勇斌的合作工作中证明，该公式将会自然导出 BCOV 理论的一个重要的结构性推论——全亏格的全纯反常方程。

另一方面，原始的 BCOV 理论给出了另一种全亏格的基本结构，被称为费曼规则。BCOV 文章中给出的亏格 1 和亏格 2 的镜像猜想正是通过该费曼规则推导出来的。早在一些低亏格的计算中，郭帅就发现，用 MSP 局部化公式，也会得出与费曼规则中的传播子极其类似的项：它们是在求和公式中唯一会真正贡献的项，以外的其他项最终都会神奇的消去。然而这些消去过程极为复杂，只能用程序逐一验证并且看不出任何规律，在很长一段时间，郭帅被这种神奇性质所困扰。最终的关键突破，看起来更像是物理学家常玩的魔术：通过修改 MSP 理论中的场的数量，把一个场修改为 N 个；当 N 趋近于无穷大时，所有的额外项就都神奇的消掉了，整个计算也变得简单到可以手工完成。通过这个思路，郭帅最终和李骏、李卫平、张怀良合作完成了新的 N -MSP 理论的构造，并证明了 BCOV 的费曼规则猜想。

从喜爱数学结构的学生到解决了关于全亏格镜像对称的一系列结构性猜想的科研工作者，郭帅还是有很多感触的。首先做数学，尤其是基础数学，坚持还是

很重要的一个品质。不知道什么时候才能证出自己想要的结果是很常见的状态。长期做不出来一个问题的情况下，就很需要把数学研究当成一种生活才可能实现突破。另一方面，也需要保持一个比较好的科研状态，不要完全死磕着一个点，尤其是在考虑很难的大问题的时候。实际上对于数学家来说，解决一个问题所需要的大部分时间往往都处在被“卡住”的状态。但是长期没有进展，除了面临外部的压力，更重要的是也会对自己产生怀疑，并影响自己的科研活力，不利于问题的解决。有时候换换思路，再回来，说不定会产生一些新的想法。

这两年中，郭帅每天在沿着核心大问题的思路思考的同时，也在考虑它延伸出的各个侧面以及与其他领域的联系。当对主要目标长期没有想法的时候，在一些相关的小问题有些新的认识，也可以保持自己的研究活力。这些小提升可能对当前思考的问题有用，也有可能现在用不上但是在未来派上用场。实在没有想法的时候，他也会做点体力活：写些程序跑一跑找点规律碰碰运气。仿佛不经意间，郭帅获得了解决最终问题所需的全部技能点，对问题的理解也越来越透彻。“回想起来，其中有些技术和想法的获得完全是出于偶然。这也是解决一个大问题所需要的另一个重要因素——运气。”郭帅说，“最终的顿悟，也是一个幸运而简单的想法，没有繁杂的技巧也没有痛苦的计算，所有问题迎刃而解，一切随之尘埃落定。”

郭帅的运气另一方面表现在，他在恰当的时间进入了适合问题的研究。某个大的数学问题的解决，除了需要个人能力达到足够的水平，往往也需要考虑数学基础的发展足够成熟。在理论发展到某个阶段使得攻克一个问题成为可能，而某个人刚好在这个时间点掌握了可以解决这个问题的关键技术的时候，他便成了打通最后关卡的那个幸运儿。因其在全亏格镜像对称和 Gromov-Witten 不变量计算方面的出色工作，郭帅获得 2019 年度“求是杰出青年学者奖”。

一个核心问题的解决，带来的往往是更广阔的天地。相信会有更多动人的数学结构吸引着他，从细微处出发，探索更大的世界。

彩蛋 Q&A

Q: 如何从无到有开始进入自己的研究方向?

A: 首先公认的肯定是需要足够的努力, 然后每人可能会有不同的机遇。我觉得在做数学的过程中, 最重要的还是要形成一个自己的认识。每个人都需要有对自己关心的问题和领域的历史发展和文献潜心学习和探索的过程, 从而形成自己特有的认识。而完善这个认识, 还要多关注相关的可能是未来趋势的理论、问题和技术。要参加各种学术活动并积极提问, 与同行多交流, 一般大多开始听不懂, 但是有了印象, 熟悉了概念, 逐渐积累起来感觉, 在之后用到时也更容易入手。

Q: 那么如何形成对自己研究方向的认识呢?

A: 我觉得每个数学家都是与众不同的, 每人都具有一套自己的思维方式, 并且很难轻易接受别人的不同观点。虽然学生时代不一定有足够的判断能力, 但是我觉得未来的数学家都应该会有这样的一种气质, 对别人的工作有自己独立的判断, 并且拥有自己的执念。一个数学工作者可能需要几年时间来对自己感兴趣的方向进行探索, 逐步建立对这个方向的整体认识。在关注最新的报告和学术文章的过程的同时, 理解他人的观点和想法, 在保持自己的执念的同时提升自己的认识, 最终形成自己独有的研究风格。

Q: 近几十年为何数学家开始关心与弦论相关的数学物理?

A: 这个领域的源头来自物理, 近二三十年来弦论革命不断刷新着人们对于基本作用力和物理定律的认识。物理学家发展了多达五种弦论模型来试图建立统一理论, 而真实世界只有一个。Witten 随后预言了这五种弦论本质上是等价的, 这些极不平凡的等价引出了很多不同数学分支之间的对偶性, 这正是数学中最为优美和深刻的那一种。这些深刻的对偶到现在数学家并未完全理解, 但取得

了很大的进展。其中镜像对称就是可以用数学语言描述的非常清楚的一种弦对偶。在 90 年代, Candelas 等人给出了镜像对称的第一个例子: 他们精确地描述了五次超曲面的计数不变量和它镜像流形上周期积分之间的深刻联系。

而在数学方面, 该领域可以保持这么多年的兴旺, 我认为关键在于最终这些问题演化成为独立的数学问题, 阮勇斌 - 田刚和李骏 - 田刚早期的工作从辛几何和代数几何上建立了这个领域的数学基础, 使之成为辛几何和代数几何中的基本问题。Kontsevich 后面提出了同调镜像对称猜想, Okounkov-Pandharipande 的工作建立了代数几何, 表示论, 随机矩阵多个领域的联系, Mirzakhani 的工作建立了计数几何和双曲几何, 动力系统之间的深刻联系, 这些都已经脱离并远远超出了物理学原有的框架。

Q: 在科研的过程中可能需要大量具体的技巧性较强的内容, 您是怎么逐步掌握的?

A: 在刚接触高亏格镜像对称这个问题的时候, 我的想法和技术上肯定没有达到现在的高度。最开始我主要关注镜像曲线及其量子化相关的问题。因为我的出发点和动机不一样, 我看一些该领域的关键技术, 比如 Givental 的理论时和大多文献的角度也不太一样。这就是我前面所说的形成自己的思维方式。很多理论和技术我是先有了自己的观点, 后来才彻底明白它原有的思想, 并认识到这和自己理解角度的差别。

数学研究中大多数时间是被卡住的, 我当然也是如此; 但比较幸运的是, 我每次被卡住的时间都没有特别长, 最久的也不到半年, 而且一般期间或多或少都有些新的想法; 现在回想起来, 几个关键技术, 都是在需要它的时间节点附近的某几个瞬间突然想明白了。我觉得之前积累的一套自己的认识体系应该有些帮助, 就像有些要点我或多或少也想过, 只是从不同的角度。

另外, 我觉得越是在卡住的时候, 大脑越应该有时间适当的放空, 就是进入

一种仍在思考，但是相对放松让思维自由游走的状态。最自然的放空时间当然是睡觉前，但是这个点想数学会容易失眠。那还有一个时间点就是在路上的时候，有段时间我在国外访问，住的地方离学校有点远，走路加坐公交要接近一个小时。公交上一般没什么人也相对安静，这时我就会随便想点什么，偶尔还真会有点新的想法冒出来。无论是独自散步还是与他人聊天，这种看起来和普通人类似的生活方式，对数学工作者却有它独特的意义。

Q: 您觉得讲过的哪门课对您来讲最有挑战？

A: 应该是上学期的《代数几何专题》。之前讲过的课，基本上都有好的教材可以参考，在备课时自己先看一遍就行。而上这门课时，我原本的计划是就几个我关心的选题讲一下，但到讲课时发现自己组织这些选题材料绝非易事。因为准备的题目比较专业，很多没有人做过的工作都需要自己先计算一遍，同时也需要梳理很多论文的结构。而学生因为没有指定教材，在学习起来也需要自己在课外进行扩展文献的阅读，探索和总结。对我自己来说，备课多消耗了很多时间，但除了讲课之外，自己也确实收获了很多东西。

Q: 那对同学们来说，您觉得讲过的哪门课最有意义？

A: 对学生最重要的应该是《复变函数》。讲这门课对我自己也是一段有意思的体验。我本科所在的基础科学班是属于物理系的，数学课也是物理风格。我最早接触复变是在一门叫做数学物理方法的课，这个课主要偏重计算。我讲复变函数，用的是北大自己出的教材，因为我自己并不做复变的研究，不熟悉这个领域到底关心什么问题。当时只是感觉这个教材真是全面，什么都有，就是和我在物理系学的复变却是没有交集。对刚接触高等数学的同学来说，复变函数确是一门极好的课，包含了很多数学领域的思想，内容非常丰富。复变函数后续也还可以学很多有意思的课程，如椭圆曲线、黎曼面、模形式这些重要的数学基础课程。

Q: 除了数学之外有没有别的爱好?

A: 爱好当然很多。体育方面,因为数学研究长期伏案工作,一般会打打羽毛球,天不冷的话会游游泳,这些也会缓解因工作引起的肌肉酸痛和僵硬。轮滑一直都比较喜欢,前几年比较忙滑得少了,最近孩子也开始学于是又重新买了鞋和他一起练习。也喜欢听音乐和看电影,不过 **imdb250** 等有名气的电影都看的差不多了,还好仍有不少不错的小众电影可以看看,最爱看推理和科幻类型。

Q: 上课时您曾举过风清扬和令狐冲的例子,是不是也比较喜欢武侠小说?

A: 嗯,武侠小说确实看过很多,金庸古龙的小说都看过很多遍了。很多做数学的人喜欢看武侠,我觉得某种原因是,里面描绘的世界和数学世界有某种相似性。做数学也是一种个人的修炼,在解决一些艰深的问题的时候需要长时间的闭关(独立思考)来获得突破,同样也需要不断和其他不同门派的高手过招(学术交流)来提升自己。要成为数学世界里的大师,往往需要拥有足够强大的个体能量,并终身持续提升自身的修为。很多武侠小说里主人公,也拥有着类似数学家的执念。

Q: 对年轻学生有什么建议?

A: 要坚持自己的想法,形成自己的研究风格。我前面说过,每个数学家都有着自己唯一的不可复制的成功模式。我相信每个人总会有自己的独到之处,在自己的研究长时间没有获得成功或者承认的时候,如果你相信自己在做有意义的事情,就仍要坚持自己的信念,不必迷信权威。在具体某个数学问题上,坚信“我肯定可以自己找到工作的方法”,我觉得年轻人应该有这样的想法。数学研究最后的成功都需要或多或少的运气,每个人总是在某个时间点达到自己的最高境界,随着现代数学发展得越来越庞大,这个点的期望年龄也在增大,数学界大器晚成例子也很多。无论如何,如果你喜欢数学,对某个问题很有兴趣,那就坚持去做。某个点,你会获得你应有的收获。