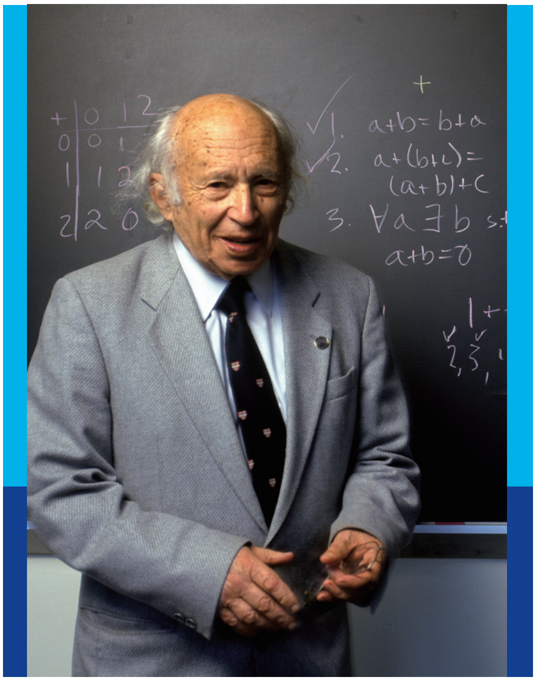
# 数学是文化的一部分
# 盖尔范德在自己 90 岁生日晚宴上的讲话

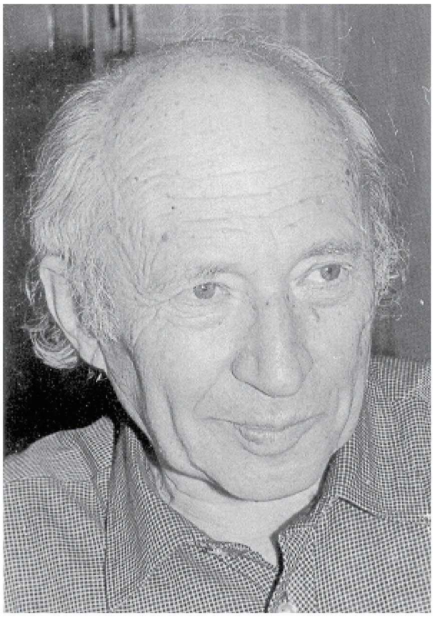
■ 林开亮 / 译



盖尔范德（Israel Gelfand, 1913-2009），1913 年 9 月 2 日出生于乌克兰，16 岁中学毕业后到莫斯科，一边教书谋生，一边自学数学。1932 年他成为苏联数学领袖柯尔莫果洛夫的研究生。1989-1990 年盖尔范德应邀在哈佛、麻省理工学院讲学，1990 年移民美国，成为罗格斯大学的教授。盖尔范德数学成就非凡，曾荣获首届沃尔夫数学奖（1978）、京都奖（1989）、俄国国家奖章（1997）和美国数学会颁发的 Steele 终身成就奖（2005）。盖尔范德一生出版了 30 多本著作，发表 800 多篇论文。盖尔范德主持面向资优高中生的莫斯科函授学校多年，并将这一模式移植到美国。他为中学生写了一系列的教材（中国科技大学出版社引进了中译本）。到美国以后，盖尔范德仍然保持着旺盛的学术精力，出版

了 3 部著作，发表了多篇文章。盖尔范德兼顾理论与应用，在研究与教学两方面都有精深造诣。在他 90 大寿时，数学界为他举办了主题为“数学的统一性”的学术会议。在这次会议上，盖尔范德本人还做了学术报告，可见他思维之活跃。盖尔范德 2009 年 10 月 5 日过世。他的友人为他建立了官方网站：https://www.israelmgelfand.com/

---



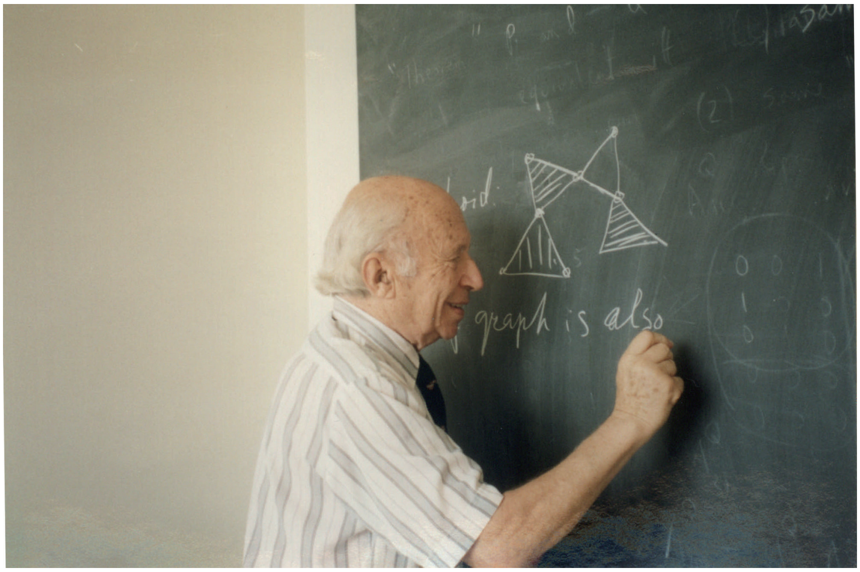
很高兴见到大家。我被问到许多问题。我将尝试回答其中几个。

第一个问题是，“为什么到我这个年纪我还能够做数学？”
第二个，“在数学中我们必须要做什么？”
第三个，“数学的未来是什么？”

我认为这些问题太具体了。取而代之，我将试图回答我自己的问题：“数学是什么？”（笑声）

让我们从最后一个问题开始：数学是什么？

我的观点是，数学是文化的一部分，就像音乐、诗歌和哲学一样。在我的会议报告中我谈到了这一点。在那里我已经提到了数学的风格与古典音乐和诗歌的风格之接近。我很高兴发现以下四个共同的特征：首先是优美，其次是简单，第三是精确，第四是不可思议的思想。优美、简单、精确和不可思议的思想这四个东西的组合，正是数学的核心、古典音乐的核心。古典音乐不仅仅指莫扎特、巴赫、贝多芬的音乐，也包括肖斯塔科维奇、施尼特凯、勋伯格（最后一个我懂得少些）的音乐。所有这些，都是古典音乐。而且，我认为以上四个特点都一直呈现其中。由于这个原因，正如我在报告中所解释的，数学家喜欢古典音乐并非偶然。他们喜欢古典音乐，是因为它有相同风格的心理组织。




在数学与古典音乐和诗歌之间还有相似的一方面：它们都是理解许多事情的语言。例如，在我的报告中我讨论了一个我有了答案但现在不想回答的问题：为什么伟大的希腊先哲要研究几何？毕竟他们是哲学家。他们将几何作为哲学来学习。尔后大几何学家追随他们并遵循了同样的传统——要缩小视觉 (vision) 与推理 (reasoning) 之间的差距。例如 欧几里得的工作汇总了他那个时代的这方面的成就。不过这是另一个话题了。

数学的一个重要方面在于，它是不同领域——物理、工程、生物——的一门合乎需求的语言。此处最重要的词语是合乎需求的语言。我们有合乎需求的语言，也有不合乎需求的语言。我都可以给出例子。例如，在生物学中用量子力学就不是合乎需求的语言，但用数学来研究基因序列就是合乎需求的语言。数学语言有助于组织许多事情。不过这是一个严肃的课题，我不想深入细节。

为什么这个课题现在重要？这是因为在我们的时代我们有“变革”。 我们有可以做任何事情的计算机。我们不再受两个运算——加法和乘法——的束缚。我们也有许多其他工具。我确信，在 10 到 15 年之内，数学将完全不同于以往的样子。

下一个问题是：在我这个年纪我如何还能做数学？回答非常简单：我不是一个伟大

的数学家。我是很认真的。我一生都只是一个学生。从我人生的最初岁月我就在努力学习。例如，现在当我聆听会议报告和阅读讲义时，我发现我不知道的仍然何其之多，而且必须要学。因此，我一直在学习。在这个意义上，我是一个学生——而决不是“首领 (Fuhrer)”。

我想提一提我的老师。我不能完全列出我的所有老师，因为实在太多了。当我年少——大约十五六岁——时，我开始学习数学。我没有接受正规的教育，从未在大学注册，我“跳过”了本科。在 19 岁时，我成为了一名研究生，我从我年长的同事那里学到很多。

那时对我来说，最重要的老师是 Schnirelman, 一个英年早逝的天才数学家。然后有柯尔莫果洛夫、Lavrentiev、Plesner, Petrovsky、庞特里亚金、维诺格拉多夫、Lusternik。他们各不相同。其中有些人我很喜欢，有些人虽然我知道他们非常优秀但不敢苟同——让我说得委婉些——其观点。（笑声）但他们都是伟大的数学家。我对他们所有人都非常感激，我从他们那里学到很多。

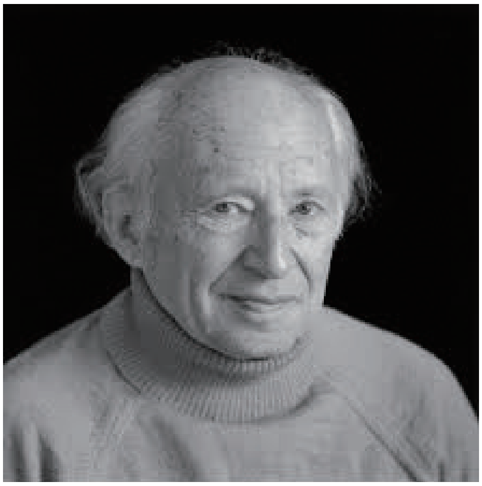
最后，我想给出一个数学之外的例子，这句简短精粹的话组合了我之前提到的简单、精确等其他特征。这是诺贝尔文学奖得主萨克 • 巴什维斯 • 辛格 [1] 说的一句话 ：“只要人还以刀枪摧毁弱小，就不会有正义。”

本文转载自公众号“和乐数学”

[1]Isaac Bashevis Singer（1902–1991），犹太裔波兰人，1978 年诺贝尔文学奖得主，著有《有钱人不死的地方》《大火》《恶魔日记》，短篇故事如《傻子金宝》《愚人国的天堂》；童书以及回忆录等。这句话原文是“There will be no justice as long as man will stand with a knife or with a gun and destroy those who are weaker than he is.”

*演说正文*

# 数学作为一门合乎需要的语言[1]



## 1. 引言

这个会议称为“数学的统一性”。我想对这个精彩的主题做少许评论。

我不认为自己是先知，我只是一个学生。在我的一生中，我曾经师从于像欧拉和高斯那样的伟大数学家、比我年长或年轻的同事、我的朋友和合作者，最重要的是向我的学生学习。这就是我持续工作的方式。

许多人认为数学是一门很枯燥很形式化的科学。然而，在数学中，任何真正好的工作都具有优美、简单、精确的特征，同时还包含着不可思议的思想。这是一种奇异的组合。在很早的时候，我就从古典音乐和诗歌的例子中理解到这个组合是本质的。

[1] 原文标题 Mathematics as an Adequate Language (a few remarks)，选自 P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer 主编的 Progress in Mathematics 丛书 244 号 The Unity of Mathematics: in honor of the ninetieth birthday of I. M. Gelfand (Birkhauser-Boston, 2004) 一书，是盖尔范德本人在会议上的报告。

而这在数学中也是典型的。很多数学家欣赏严肃的音乐也许不是偶然。

当我们想到音乐的时候，我们并不像通常在数学中那样将它分成一些特殊的领域。如果你问一个作曲家他的职业是什么，他会回答说，“我是作曲家。”而不大可能说“我是四重奏的作曲家”。也许这就是当我被问及做哪一种数学时，我只是简单地答复“我是数学家”的原因。

我有幸结识了伟大的保罗 • 狄拉克。与他在匈牙利相处的几天，我受益颇多。

1930 年代，年轻的物理学家泡利写了一本关于量子力学的绝佳著作。在最后一章，泡利讨论了狄拉克方程。他写道，狄拉克方程有瑕疵，因为它将导致不可能、甚至是疯狂的结论：

1. 方程预言，除电子外，还存在带正电荷的电子，即正电子，但没有人观测到它。
2. 而且，电子遇到正电子时的行为很奇异：二者将湮灭并形成两个光子。

而且完全不可思议的是：

3. 两个光子可以变成一个正、负电子对。

泡利写道，尽管如此，狄拉克方程还是非常有趣，而狄拉克矩阵尤其值得注意。

我问狄拉克：“保罗，既然有这些批评，为什么你没有放弃你的方程而是继续追求你的结果？”

“因为它们很美妙。”[2]

现在，数学的基本语言中有根本性的改革，稍后我会谈到这一点。在这个时候，尤

[2] 无独有偶，1954 年杨振宁与米尔斯 (Robert Mills) 一起提出后来发展为规范理论的杨 - 米尔斯 (Yang-Mills) 方程时，也遭到了泡利的反对，而且杨振宁与米尔斯也同样是基于美妙的理由发表了他们的工作。见杨振宁，Selected Papers 1945-1980 with Commentary (W. H. Freeman and Company, 1983) 一书第 19-21 页或江才健《规范与对称之美——杨振宁传》( 台北，天下远见，2002 年；广州，广东经济出版社，2011 年 ) 第九章的叙述。

其重要的是，要记住数学的统一性，记住它优美、简单、精确和不可思议的思想。

对我非常有用的是，我会提醒自己，当音乐风格在 20 世纪发生改变时，许多人说现代音乐缺少和声，没有遵循标准规则，有不协和音，等等。但是，勋伯格、斯特拉文斯基、肖斯塔科维奇和施尼特凯的音乐如同巴赫、莫扎特、贝多芬一样地精确。

## 2 非交换乘法

我们可以从重新思考两个最简单的运算——加法和乘法——的关系开始。

传统的算术和代数太局限了。它们源于简单的计数，描述了人、物等之间的最简单的关系。这个语言是循序渐进的：做运算就像在读一本书，这个语言的公理（环、代数、除环、范畴等）太刚硬了。例如，Wedderburn 的一个定理断言，一个有限的可除代数总是交换的。

### 2.1 非交换的中学代数

我和 V. Retakh 用了 12 年来努力理解结合而非交换的乘法。这是可能的最简单的运算：你对由一个给定字母表的字母所构成的单词做操作，两个单词的乘法由相连定义。其中的部分结果已经描述在我与 S. Gelfand，V. Retakh 以及 R.Wilson 合写的综述 Quasideterminants 中。我想说，非交换数学正如交换数学一样简单（或者前者比后者甚至更简单），不过它们是不同的。这个结果之丰富令人惊讶。

取可除代数上的一个二次方程

$$x^2 + px + q = 0.$$

令 $x_1, x_2$ 为其左根，即 $x^2_i + px_i + q = 0,\ i = 1, 2.$ 不同于交换情形，你得不到 $-p = x_1 + x_2,\ q = x_1x_2$。为写出正确的公式，我们必须给 $x_1, x_2$ 披上“新衣裳”。即，假定它们的差是可逆的，并令 $x_{2,1} = (x_1-x_2)x_1(x_1-x_2)^{-1},\ x_{1,2} = (x_2-x_1)x_2(x_2-x_1)^{-1}$，则我们有

$$-p = x_{1,2} + x_1 = x_{2,1} + x_2, \quad q = x_{1,2}x_1 = x_{2,1}x_2$$

为将上述定理推广到具有左根 $x_1,\cdots,x_n$ 的 $n$ 次多项式，我们需要通过遵循同样的模式，对这些根找到其“新衣裳”。对于 $\{1,\cdots,n\}$ 的任意子集 $A=\{i_1,\cdots,i_m\}$ 以及任意的 $i\notin A$，我们引进伪根 (*pseudo-roots*)$x_{A,i}$。它们由下述公式给出：

$$x_{A,i}=v(x_{i_1},\cdots,x_{i_m},x_i)x_i v(x_{i_1},\cdots,x_{i_m},x_i)^{-1}$$

其中 $v(x_{i_1},\cdots,x_{i_m},x_i)$ 是范德蒙拟行列式 (Vandermonde quasideterminant)，$v(x_i)=1$,

$$v(x_{i_1},\ldots x_{i_m},x_i)=\begin{vmatrix} x_{i_1}^m & \ldots & x_{i_m}^m & x_i^m \\ & \ldots & & \\ x_{i_1} & \ldots & x_{i_m} & x_i \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

现在假定 $x_1,\cdots,x_n$ 是单重的 (multiplicity free)，即，对任意的 $A$ 以及 $i\notin A, j\notin A, i\neq j$，都有 $x_{A,i}-x_{A,j}$ 可逆。

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的单重根。令 $(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排序（排列）。令 $\tilde{x}_{i_k}=x_{\{i_1,\cdots,i_{k-1}\},i_k}, k=1,\cdots,n$。则我们有下述

**定理**

$$\begin{aligned} -a_1 &= \tilde{x}_{i_n}+\cdots+\tilde{x}_{i_1}, \\ a_2 &= \sum_{p>q}\tilde{x}_{i_p}\tilde{x}_{i_q} \\ &\ldots, \\ a_n &= (-1)^n\tilde{x}_{i_n}\ldots\tilde{x}_{i_1}. \end{aligned}$$

这些公式引出一个分解：

$$P(t)=(t-\tilde{x}_{i_n})(t-\tilde{x}_{i_{n-1}})\ldots(t-\tilde{x}_{i_1}),$$

其中 $P(t)=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$ 而 $t$ 是一个中心变量 (central variable)。

因此，若这些根是单重的，则 $P(t)$ 有 $n!$ 个不同的因式分解。在交换的情形，$P(t)$ 也有 $n!$ 个因式分解，但它们是一致的。

当 $i \notin A, j \notin A$ 时，诸变量 $x_{A,i}$ 满足关系：

$$x_{A\cup\{i\},j} + x_{A,i} = x_{A\cup\{j\},i} + x_{A,j},$$
$$x_{A\cup\{i\},j} \cdot x_{A,i} = x_{A\cup\{j\},i} \cdot x_{A,j}.$$

由这些变量和这些关系所生成的代数称为 $Q_n$。这是非交换多项式的伪根的一个泛代数。通过对这个代数取商，我们可以研究特殊的多项式，例如具有重根 $x_{A,i} = x_{A,j}$，$j$(对某 $i$, $j$ 以及 $A$) 的多项式。即便是对于一个平凡的多项式 $x^n$，也对应着 $Q_n$ 的一个有趣的商代数 $Q_n^0$。例如，$Q_2^0$ 是一个非平凡的代数，具有生成元 $x_1, x_2$ 并满足关系 $x_1^2 = x_2^2 = 0$。

注意，$Q_n$ 是一个 Koszul（即“好”）代数，而且其对偶也有一个有趣的结构。

## 2.2 带有两种乘法的代数

有时，一个简单的乘法是两个更简单的乘法之和。一个很好的例子是 Retakh，R. Wilson 和我所研究的非交换对称函数的代数。用上一小节的记号，这个代数可以描述如下。令 $x_1,\cdots,x_n$ 是独立的非交换变量。令 $(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排序。$\tilde{x}_{i_1},\dots,\tilde{x}_{i_n}$ 如上定义。令 $sym$ 是下述函数所构成的代数：它是 $\tilde{x}_{i_1},\dots,\tilde{x}_{i_n}$ 的多项式并且关于 $x_1,\cdots,x_n$ 对称。代数 $sym$ 不依赖于 $1,\cdots,n$ 的重排，我们称之为变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的非交换对称函数的代数。

为在代数 $sym$ 中构造一个线性基，我们需要一些记号。令 $w = a_{p1}\cdots a_{pk}$ 是用有序字母表 $a_1<\cdots<a_n$ 所构成的一个单词。整数 $m$ 称为单词 $w$ 的一个降位 (descent)，若 $m < k$ 且 $p_m > p_{m+1}$。令 $w$ 的所有降位的集合记为 $M(w)$ 。

选择 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意排序，比如，$x_1 < x_2 <\cdots < x_n$。对任意有序数组 $J = (j_1,\cdots,j_k)$，定义

$$R_J = \sum \tilde{x}_{p_1}\dots\tilde{x}_{p_m},$$

其中求和跑遍所有满足下述条件的单词 $w = x_{p_1}\cdots x_{p_m}$, $M(w) = \{j_1, j_1+j_2,\cdots, j_1+j_2+\cdots+j_{k-1}\}$。

多项式 $R_J$ 称为 Ribbon Schur 函数，它们是 MacMahon 所引入的交换 Ribbon Schur 函数的非交换类比。

对非交换的 Ribbon Schur 函数，可以定义两种乘法：设 $I=(i_1,\cdots,i_r)$, $J=(j_1,\cdots,j_s)$。

令 $I+J=(i_1,\cdots,i_{r-1},i_r+j_1,j_2,\cdots,j_s)$, $I\cdot J=(i_1,\cdots,i_{r-1},i_r,j_1,j_2,\cdots,j_s)$。令 $R_I *_1 R_J=R_{I+J}$, $R_I *_2 R_J=R_{I\cdot J}$。

乘法 $*_1$ 和 $*_2$ 是可结合的，并且它们的和等于 *sym* 中的标准乘法。换言之，

$$R_I R_J=R_{I+J}+R_{I\cdot J}。$$

事实上，代数 *sym* 可由一个元素 $\tilde{x}_1+\cdots+\tilde{x}_n$ 以及两个乘法 $*_1$ 和 $*_2$ 自由生成。

这两个乘法在 Magri-Dorfman-Gelfand-Zakharevich 的可积系统理论中发挥着根本作用。这一理论是基于一对满足下述条件的 Poisson 括号：它们的任意线性组合也是一个 Poisson 括号。这一结构的 Kontsevich 量子化给出了一族可结合的乘法。

我认为是时候研究多个乘法了。这也许会引出许多新的联系。

### 2.3 遗传性 vs 可乘性

在纯粹数学和应用数学领域，如何处理分块矩阵都是一个很重要的问题。为解决此类问题，人们需要恰当的语言，这种尝试最早可以追溯至 Frobenius 和 Schur。我和我的同事认为我们找到了一门能胜任的语言：拟行列式 (quasi determinants)。虽然拟行列式不具有通常行列式所具有的可乘性质，但不同于交换的行列式，它们满足更重要的“遗传性原理 (Heredity Principle)”：设 $A$ 是可除代数上的一个方阵，$(A_{ij})$ 是 $A$ 的一个分块。将各个 $A_{ij}$ 视为一个矩阵 $X$ 的元素。则 $X$ 的拟行列式将是一个矩阵 $B$，并且（在自然的假定下）$B$ 的拟行列式等于 $A$ 的一个适当的拟行列式。也许，代之以研究范畴，人们应该研究具有“遗传性原理”的结构。

多维矩阵 (multi-dimensional matrices) 的行列式也不满足可乘性质。因此我们不应过于遵从传统，必须要求行列式满足可乘性质。对于多维矩阵的处理，我想我们已经找到了处理它的合乎需求的语言（见我和 M. Kapranov 以及 A. Zelevinsky 的书 Discriminants，Resultants, and Multidimensional Determinants）。这一技巧的一个优美应用由 M. Bhargava 在其博士论文《高阶合成律》(Higher composition laws) 中给出，联系了多重线性代数与经典数论。我预测，这仅仅是一个开始。

## 3 加法和乘法

加法与乘法之间关系的简单性有时会让人产生错觉。一个具有一个生成元（记为 1）带加法运算的自由阿贝尔群，与一个具有无限多个生成元（称为素数）带乘法运算的自由阿贝尔半群，是可以想象出的最简单的对象，但二者的“联姻”给出了整数环。

而且，即便是 Gross，Iwaniec 和 Sarnak 也无法回答关于整数环的所有奥秘。例如，解决黎曼假设。伟大的物理学家 Lev Landau 曾评论到：“我不明白为什么试图证明关于素数相加的定理。素数是用来相乘而不是相加的。”但对一个数学家而言，素数加法的本性是理解加法和乘法这两个运算之关系的关键。

注意，像 Minkowski 混合体积与赋值等理论都是加法的非常有趣的形式。

各种不同类型的典范基底 (Gelfand-Zetlin，Kazhdan-Lusztig，Lusztig，Kashiwara，Berenstein-Zelevinsky) 的发明，其实都是在试图将加法和乘法联系起来。许多好的基底都有几何本质：它们（或者应该）与某些多面体的三角剖分 (triangulations) 有关。

另一个尝试是 Whitney 创造拟阵 (matroids)。Whitney 试图将向量线性无关的概念公理化。这给出了代数与组合几何的有趣联系。稍后我将谈到这一点。

不同类型的拟阵——包括我和 Serganova 引进的 Coxeter 拟阵——的代数方面，在 A. Borovik, I. Gelfand 和 N. White 最近的一本书 Coxeter Matroids 中有讨论。但这还

只是一个开始。特别地，我们要在非交换代数和几何中开创拟阵。

## 4 几何

与代数相比，几何具有不同的本性：它是基于一个整体的视觉 (perception)。在几何中，我们对图像——如电视图像——做操作。

我不明白为什么我们的学生对学习几何有困难：他们一直在看视频。我们只是需要思考如何利用它。无论如何，图像在现代生活中发挥着越来越重要的作用，从而几何也应在数学和教育中扮演更重要的角色。在物理学中，这意味着我们应该返回到法拉第的几何直觉（基于一门合乎需求的几何语言）而不是麦克斯韦所用的微积分。人们对麦克斯韦印象深刻是因为他用了微积分：他那个时代最先进的语言。

这个会议的许多报告 (Dijkgraaf，Nekrasov，Schwarz，Seiberg，Vafa) 都致力于在物理学中寻求适当的几何语言。请大家永远铭记 E. Cartan，并向 Atiyah 和 Singer 学习。

### 4. 1 拟阵与几何

我仅提及几何的一个分支——组合几何，并给出两个具体的例子。一个例子是拟阵的概念。当我认识到拟阵对 S. Gelfand，M. Graev，M. Kapranov，A. Zelevinsky 和我所研究的超几何函数的几何给出恰当的语言后，我对拟阵产生兴趣了。我与 R. MacPherson 利用拟阵给出了流形的上同调类的一个组合描述。沿着这条路线，MacPherson 利用定向拟阵给出了组合流形的描述。我们应该有基于辛拟阵和 Lagrange 拟阵的类似理论。

特别地，对 Chern-Simons 示性类，我们应有一个好的“拟阵”描述。

### 4. 2 几何与蛋白质设计

另一个例子是我与 A. Kister 的工作《组合与 $\beta$ 蛋白质的几何结构》(*Combinatorics and geometrical structures of beta-proteins*)。通过一步一步地分析真实的结构，我们试图创造出适合这门科学的适当语言。这是一门面向生物对象的新几何。

## 5 Fourier 变换与超几何函数

我们在寻求一门合乎要求的语言时，不要怕挑战经典，即便是像欧拉那样的经典。最近，我们对超几何函数的方法可以基于像 $e^{xe^{\sqrt{-1}\omega t}}$（其中 $x$ 和 $\omega$ 是复变量而 $t$ 是实数）这样的双重指数函数的傅里叶变换。此种函数的傅里叶变换是作用于解析函数的泛函。例如，令 $F(x,\omega,z)$ 是双重指数函数 $e^{xe^{\sqrt{-1}\omega t}}$ 的傅里叶变换，则

$$\{F(x,\omega,z),\phi(z)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\phi(-k\omega)$$

我们可以定义 $F(x,\omega,z)$ 的作用为 $\phi\mapsto\sum\mathrm{Res}[f(z)\phi(z)]$，其中 $f(z)$ 是一个以 $k\omega,k=0,1,2,\cdots$ 为单极点的亚纯函数。

函数 $f(z)$ 在相差一个解析函数的意义下唯一确定。例如，我们可以选取

$$\Gamma_0(x,\omega,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{z+k\omega},$$

或

$$(-x)^{-\frac{z}{\omega}}\Gamma\left(\frac{z}{\omega}\right).$$

我们现在相信 $\Gamma_0$ 应该取代超几何函数论中的欧拉 $\Gamma$ 函数，不过与 Graev 和 Retakh 合作的这一工作还在进展中。

## 6 应用数学，非线性 PDE 与爆破

我在探求一门合乎需求的语言的努力部分基于我在应用数学方面的工作。Sergey Novikov 曾在某处称我为“杰出的应用数学家”，我认为这是极高的褒奖。我从高斯那里学习到应用数学的重要性。我认为高斯之所以伟大，部分是因为他必须处理像天文学这样的实际问题，而且他欣赏计算 (Gauss admired computations)。例如，我最近发现，在汉密尔顿发现四元数 30 年前，高斯就构造出四元数的乘法表。

顺便提一句，我想起曾与高斯的一次“心灵交流”。当我发现阿贝尔群的特征标的

傅里叶变换时，我想到现在我可以革新高斯和从而改变数论。我甚至假想告诉高斯这一点。接下来我认识到，高斯也许会对我说："你个傻帽少年！难道你不认为我在研究这种和式时就已经意识到了吗？"

### 6.1 PDE 与 Hironaka

在 1950 年代末，作为一个应用数学家，当我研究非线性偏微分方程时，我认识到奇点消解的重要性。我理解到，我们必须通过换元和添加新变量来处理一连串的消解（爆破）。因此，我对欣然接受 Hironaka 的伟大结果有了充分准备。我们花了一年时间来学习他的文章。Hironaka 的定理看似与非线性 PDE 无关。但对我来说，它正好体现了数学的统一性。

我要在此强调，对非线性 PDE，至今我们仍然没有一个"Hironaka"理论。

### 6.2 Tricomi 方程

当布尔巴基的书[3]开始在莫斯科出现时，我就想看看"在哪一卷中会发表 Tricomi 方程的基本解。"布尔巴基终究没有发表这一结果，是时候我自己来做这件事了。[4]

Tricomi 方程是

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$$

对 $y>0$ 它是椭圆的，而对 $y<0$ 它是双曲的。我与 J. Barros-Neto 合作，发现了 Tricomi 方程的基本解，延续了 Leray，Agmon 等人的工作。

## 致谢

我要感谢 Tanya Alexeevskaya 和 Tanya Gelfand 对引言部分的帮助，感谢 Vladimir Retakh 对数学部分的帮助。

[3] 指法国数学家们用布尔巴基的笔名创作的多卷本《数学原理》。

[4] Gelfand 与 Barros-Neto 的论文标题是 The fundamental solution of the Tricomi operator I,II,III, 分别发表于 1999，2002，2005 年，在 Tricomi 方程（1923 年）提出近 80 年之后。