谈数学职业

张恭庆

一、前言

上个世纪 50 年代，数学通报 [1] 刊登了苏联数学家柯尔莫哥洛夫的“论数学职业”的译文。我上大学时，这是我们“专业教育”的材料。对于我们这代学数学的人产生了很大的影响。然而半个多世纪过去了，数学的面貌发生了很大的变化，数学的职业也多样化了。2009 年的《华尔街日报》上，发表了一篇文章 [2]，其中附有一张由 CareerCast.com 制作的，以工作环境、收入、就业前景、体力要求、体力强度为指标的职业排行榜。在这排行榜中，数学家荣登榜首，保险精算师和统计学家分列第二和第三，后面是生物学家、软件工程师、计算机系统分析员等等。从这 5 个指标来看，数学家的收入不算很高，但综合起来还排在第一，可见在其它方面占有优势。

The Best and Worst Jobs

Of 200 Jobs studied, these came

The Best

1. Mathematician
2. Actuary
3. Statistician
4. Biologist
5. Software Engineer
6. Computer Systems Analyst
7. Historian

2009年《华尔街日报》列出的职业排名表的部分内容

二、数学和它的基本特征

什么是数学？

从中学起，我们就知道数学是研究“空间形式”和“数量关系”的学科。数量关系，简称为“数”，空间形式简称为“形”；“数”的对象比如说自然数、复数、向量、矩阵、函数、概率等，“形”的对象比如说曲线、图、空间、流形等。

数学实际上是一门形式科学，它研究的是抽象元素之间的“关系”和“运算法则”。这些“相互关系”和“运算法则”构成了数学“结构”。判断数学结论的真伪，主要看其逻辑演绎是否正确，被实践检验的只是构成这些“相互关系”与“运算法则”的“结构”是否与实际相符。

2009 年的华尔街日报上，发表了以工作环境、收入、就业前景、体力要求、体力强度为指标的职业排行榜。在这排行榜中，数学家荣登榜首，保险精算师和统计学家分列第二和第三。

我们举一个例子来说明。大家都知道平面几何中的“平行公设”：在平面上过直线外一点，有且仅有一条直线平行于该直线。这是公设，是假定，可以由此推出平面几何的很多定理。但为什么在平面上过直线外一点有且只有一条直线平行于该直线呢？可不可以没有？可不可以不止一条？就几何学来说，假定只有一条，可以推出一大堆几何命题，例如：三角形三内角之和为 180°，这是欧氏几何；假定有不止一条也可以推出另外一大堆命题，例如：三角形三内角之和小于 180°，这是双曲几何；假定一条也没有照样还可以推出一大堆命题，这是椭圆几何。双曲几何与椭圆几何都是非欧几何。那么到底哪一种几何的结论是正确的？这要看你把这些几何结论应用在什么范围内，应用到什么问题上去。在以地球为尺度的空间范围内，欧氏几何是适用的，实际上它与非欧几何中

的双曲几何的差异不大。当把宇宙作为一个整体来描述时，就要用双曲几何了。这有点像牛顿力学与相对论力学的关系。由此可见，决不能认为凡是数学上证明了的定理就是真理。只能认为这些结论是在它的“结构”中在逻辑上被正确地证明了。至于其是否与实际相符，还要检查它的前提。从这个意义上说，数学只是一个形式体系。

如果把数学的研究对象只用“数”和“形”来概括，那么有些东西还无法概括进去，比如数学语言学。各种计算机的语言都是根据数学原理制做出来的，可语言是“形”还是“数”呢？看来都不是。又比如在“选举”办法上，一个非常有名的结论——阿罗不可能性定理[3]。阿罗(K. Arrow)是个经济学家，诺贝尔奖获得者，学数学出身。他证明了一条定理：对于不少于3个候选人的选举按“排序”投票，不存在任何同时遵循以下四个原则的群体决策：

肯尼斯•阿罗(Kenneth Arrow)
1972年诺贝尔经济学奖得主

1. 无限制原则。(任何人可对所有候选人任意排序)。
2. 一致性原则。(如果每个人的态度都是“A 优于 B”，那么群体决策结果也应“A 优于 B”)。
3. 独立性原则。(添加或减少候选人，“排序”不变)。
4. 非独裁原则。(不能一个人说了算)

这也是一条经济学上的定理：没有同时遵从以上四条原则的“社会福利函数”。这是数学在其他领域——政治学、经济学——的一个重要的应用。在这条定理中，哪里有“数”？哪里有“形”？可见“数”和“形”已经不能完全概括数学的研究对象了。现代人们不再限定研究对象是不是“数”和“形”，只要能对其建立数学模型，就能通过模拟计算来研究其中的规律，例如对于社会心理、动物行为等方面的数学分析。所以，数学研究的范围扩大了，现在人们说数学的对象是：“模式”(pattern)、“秩序”(order)、“结构”(structure)。

纯数学与应用数学

数学又划分为纯数学和应用数学，纯数学在我国又称基础数学。研究数学自身提出的问题，划归纯数学；研究数学之外（特别是现实世界中）提出来的问题划归应用数学。应该说，这种划分只是大致的，并没有严格的界限。一方面，纯数学中的许多对象，追根溯源还是来自解决其它方面的问题，如天文学、力学、物理学等。比如几何来源于测量：天文测量、大地测量。就在数学已经高度发展了的今天，从外部提出来的数学问题照样可以转化为非常有意义的纯数学的问题，刺激出深刻的数学理论。比如说，Navier-Stokes 方程是流体力学中的重要的方程，NP 问题是从计算理论中提出来的问题，到现在都还没有被解决，成为“千年七大难题”中的两个。另一方面，纯数学的理论在适当条件下也能在其它科学中放出异彩：群论和几何对物理的贡献是众所周知的。大家都认为数论是很“纯”的数学，但数论在现代密码学中起重要作用，此外如傅里叶 (Fourier) 分析与通讯，随机过程与金融，几何分析与图像处理等等都是这方面的例子。特别是，许多在应用数学中行之有效的方法都有深刻的纯数学背景，如快速傅里叶变换，有限元方法等。

纯数学大致有：数理逻辑、数论、代数、拓扑、几何、分析、组合与图论等分支，它们之间的融合与渗透又产生出许许多多的交叉分支，如代数几何、代数数论、微分几何、代数拓扑、表示理论、动力系统、泛函分析等，以及更多的子分支。

微分方程与概率论是介于纯数学与应用数学之间的分支，它们的理论部分属于纯数学，其余部分则是应用数学。计算数学与数理统计是应用数学最重要的两个分支。

纯数学对于问题的解答往往只停留在研究解的存在性以及个数上，未必讨论解的具体算法（如代数方程求根）。但实际问题的解答一般总要求具体的数据，单有纯数学的结论不能满足要求，因此还要研究

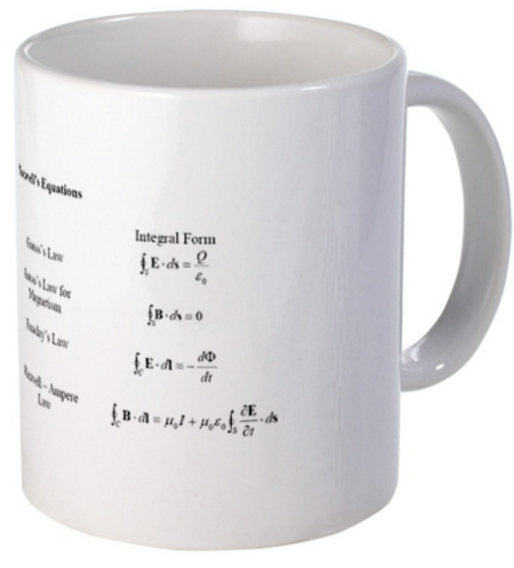
正如 Borel 说的：“纯数学和应用数学就像是一座冰山 —— 水面上的是应用数学，因为它有用，大家都看得见；水底下的是纯数学。”没有水底下纯数学的深厚积累，上面的应用数学是建立不起来的。

算法，以及如何对待巨大的计算量、存储量、复杂性、精确性、速度、稳定性等等问题。这些就是计算数学要解决的问题。

以概率论为基础的统计学称为数理统计。日常生活、社会调查、科学实验都积累了大量的数据，如何从这些数据中科学地得到有用的信息？数理统计研究如何通过有效的收集、整理和分析带有随机性的数据，对所考察的问题做出推断、预测乃至决策的方法。

当代的数学已被应用到很多领域。自然科学：物理、化学、生物、天文、地质、气象等，人文科学：经济、金融、精算、语言、考古等。很多管理科学问题也要用到数学。

这么多有用处的数学，表面上看都属于应用数学。然而，正如 Borel 说的：“纯数学和应用数学就像是一座冰山—水面上的是应用数学，因为它有用，大家都看得见；水底下的是纯数学。”[4] 没有水底下纯数学的深厚积累，上面的应用数学是建立不起来的。



印在茶杯上的麦克斯韦尔方程组

数学的基本特征

因为数学研究的是抽象的对象，所以应用范围必然广泛；又因为它的研究手段不是实验，而是逻辑推理。这就决定了它必须是严密的和精确的。因此数学明显地有如下基本特征：

(1) 高度的抽象性与严密的逻辑性

(2) 应用的广泛性与描述的精确性

数学应用的广泛性不仅表现在：它是各门科学和技术的语言和工具，数学的概念、公式和理论早已渗透到其它学科的教科书和研究文献中去了；而且还表现在：许许多多数学方法都已被写成软件，有的还被制成芯片装置在几亿台电脑以及各种电器设备之中，成为产品高科技含量的核心，还有些数学软件则是作为商品在出售。

在这些应用中，我想特别指出：数学是探求知识的重要手段。举一个例子，历史上许多重要的发现，没有数学光靠实验是不够的。现在大家人人用手机，不论多远几秒钟就能通上话，为什么信息能传输得这么快？靠的是电磁波。电磁波是怎样发现的？

英国理论物理学家、数学家麦克斯韦尔（Maxwell）运用电流的法拉第定律、安培定律、电荷的高斯定律和磁场的高斯定律，推出一组偏微分方程。在推写过程中，他注意到原来的安培定律和时间无关，而且与其他几个定律不相容。为了解决这个问题，麦克斯韦尔提出加上一“位移电流”到原先的安培定律中去，写出了今天通用的麦克斯韦尔方程组，这个修正后的方程组导出波动方程，由此预见了电磁波。麦克斯韦尔以液体流动，热传导及弹性力学作为模型，认为“以太”是传导电磁波的媒介 [5]，尽管这种解释在物理上是不对的，也讲不清楚，但它的数学形式——麦克斯韦尔方程组却是正确的，它奠定了电磁学的基础。后来赫兹（Hertz）在实验上证实了电磁波的存在。

同样地，在量子力学电脑、相对论的理论建立过程中，数学也起了极为重要的作用。

在当今时代，科学计算更是在一定程度上取代实验。一旦研究对象的机理已经清楚，准确的数学模型已经建立，就可以用模拟计算替代部分试验，如核试验等。

数学的基本特征除以上两条外，还有

(3) 数学研究对象的多样性和内部的统一性

随着数学研究对象的扩充，数学分支不断增加，方向繁多，内容丰富。同时数学分支之间的内在联系也不断被发现，数学内部的千丝万缕的联系被愈理愈清。希尔伯特－诺特－布尔巴基（Hilbert-Noether-Bourbaki）利用数学分支间的这些被清理过的联系和公理化方法，从规定的几条“公理”及其相关的一套演算规则中提炼出数学“结构”，如代数结构、拓扑结构、序结构等。数学的不同分支是由这些不同的“结构”组成的，而这些结构之间的错综复杂、盘根错节的联系又把

所有的分支联成一个整体。在这方面反映了数学的统一性。

对统一性追求的意义在于：对于同一个对象可以从不同角度去认识，不同分支的问题可以相互转化，理论和方法可以相互渗透，从而发展出许多新的强有力的工具，解决许多单个分支方法难于解决的重大问题。

回顾以下历史是颇有裨益的。历史上有三大几何难题：倍立方问题，化圆为方问题，三等分角问题，都是“圆规直尺”的作图题。两千多年了，光用几何方法研究，不知有多少人费了多少心血，可就是解决不了！在那些时代，代数学主要研究解方程。后来笛卡尔用解析几何统一了几何与代数。18 世纪末到 19 世纪初，多项式方程可解性的研究继高斯 (Gauss) 代数基本定理证明之后应运而生。高斯研究正多边形的圆规直尺作图就换了一个角度，把它看成一个多项式方程的可解性问题，从几何问题转化到了代数问题。后来阿贝尔 (Abel)、伽罗华 (Galois) 在代数上把方程的可解性研究推向了高峰。

许多困难的问题都需要很多学科的知识综合起来才能解决。例如，庞加莱猜想的提法本来纯粹是拓扑学的，后来转化为几何问题，最后是综合使用偏微分方程、拓扑、几何的思想、理论和方法才把这一个复杂问题解决了的。

什么样的“数”能被圆规直尺作出来？对于事先给定了的一组实数 Q，能从它们“尺规作图”出来的数 x，就是从它们出发，作加减乘除以及开平方所能得到的数。也就是说：尺规作图问题可解等价于存在正整数 m，使得 x 属于 F_m，其中 $F_{i+1}=\left\{a_i+b_i\sqrt{c_i}\,\middle|\,a_i,\ b_i,\ c_i^2\in F_i\right\}$， $F_1=Q$。

三等分角问题是：对任意给定的角 θ，作出一个大小为其三分之一的角 $\theta/3$。令 $\alpha=\cos\theta$，要作出数 $x=\cos(\theta/3)$。x 是多项式

$$4x^3-3x-\alpha=0$$

的根。只要证明对于任意的正整数 m，它的根 x 都是不属于 F_m 的，就证明了三等分一个任意角只用圆规与直尺是不可能的！

1837 年法国数学家 Wantzel 证明了以上方程连同倍立方问题对应的方程在 $\{F_m|m=1,2,\cdots\}$ 都是不可解的。后来，1882 年林德曼（von Lindemann，希尔伯特的导师）证明了 π 的超越性从而确立了尺规作图化圆为方也是不可能的。两千年前的三大几何难题就是这样用代数和数论的方法以否定的形式解决了！

现在数学已经发展成为一个庞大的、内部和谐与统一的、充满活力的有机的整体，它是人类文化宝库中一座既宏伟又精致的创造物。

三、当代社会对数学家的要求

当今世界，数学已被应用到几乎一切领域。然而现实情况一方面是，许许多多新的领域要求人们用数学的眼光，数学的理论和方法去探讨；另一方面，科学的发展使人们的分工愈来愈细。18 世纪以前的数学家中有不少人同时也是天文学家、力学家、物理学家；在 19 世纪，许多数学家还可以在数学的几个不同分支上工作；但自庞加莱 (Poincare) 和希尔伯特 (Hilbert) 之后，已经没有一个人能够像他们当年那样通晓数学全貌了。大多数的数学家只能在狭窄的领域内从事研究。这种过于专门化的趋势对于数学学科的发展是十分有害的！ 这确实是个矛盾的现象。如果我们不能对当今数学的发展与趋势有一个大致的了解，我们就不知道如何应对，也不知道应该怎样培养学生。

当代数学发展的趋势

当代数学发展的趋势大致有如下几个特点：

1、数学内部的联系进一步加强 在指数增涨的研究文献中，尽管数学的各个分支的前沿都在不断推进，数学在深度与广度两方面都得到快速发展，然而不同分支之间的融合与相互渗透则是一个重要的特征。这表现为：原来长期处于纯数学边缘的分支，比如偏微分方程和概率论，现在已经进入了纯数学的核心。相隔很远的分支间的内在联系不断发现，如 de Rham-Hodge 定理、阿蒂亚－辛格 (Atiyah-Singer) 指标定理等。许多困难的问题都需要很多学科的知识综合起来才能解决，例如，庞加莱猜想的提法本来纯粹是拓扑学的，后来转化为几何问题，光从几何也解决不了，最后是综合使用偏微分方程、拓扑、几何的思想、理论和方法才把这一个复杂问题解决了的。

2、数学与其它科学的交叉形成了许多交叉学科群 比如，科学计算就是数学与物理、化学、材料、生物、力学等很多学科的交叉。数学与控制论、运筹学交叉形成了系统科学。数学与物理交叉，形成数学物理。此外还有计算机科学、信息科学、数量经济学、金融数学、生物数学、数学化学、数学地质学、数学心理学、数学语言学等等很多的交叉学科。

3、数学应用的领域空前扩张，成为开发高新技术的主要工具 信息安全、信息传输、图像处理、语音识别、医疗诊断、网络、海量数据处理、网页搜索、商业广告、反恐侦破、遥测遥感，包括当代制造业、成衣业等等都大量应用数学。