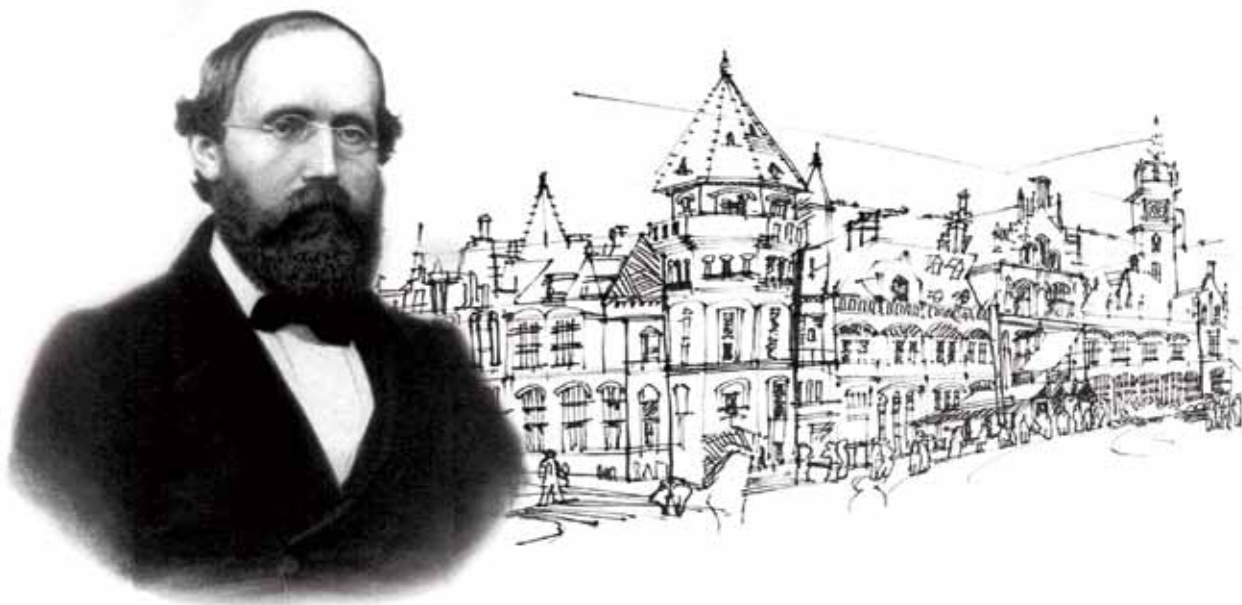


Riemann



黎曼猜想漫谈 (三)

卢昌海

12 休闲课题：围捕零点

听说时下流行一种休闲方式叫做 DIY (Do It Yourself)，讲究自己动手做一些原本只有工匠才做的事，比方说自己动手做件陶器什么的。在象我这样懒散的人看来这简直比工作还累，可如今许多人偏偏就兴这个，或许是领悟了负负得正(累累得闲?)的道理吧。既是大势如此，我们也乐得共襄盛举，安排“休闲”一下，让大家亲自动手用黎曼-西格尔公式来计算一个黎曼 ζ 函数的非平凡零点。

DIY 一般有个特点，那就是课题虽然选得颇见难度，做起来通常却是挑最简单的来做，以免打击休闲的积极性。我们计算零点也一样，挑相对简单的零点来计算。那么什么样的零点比较容易计算呢？显然是那些听黎曼的话，乖乖地躺在 critical line 上

的零点——因为否则的话黎曼猜想早被推翻了。

在黎曼-西格尔公式中有许多复杂的东西，其中最令人头疼的是求和，因为它使计算量成倍地增加。但幸运的是那个求和是对 $n^2 < t/2\pi$ 进行的，因此如果 $t < 8\pi \approx 25$ ，求和就只有 $n = 1$ 一项。这显然是比较简单的，因此我们狡猾的目光就盯在了这一区间上。在这一区间上，黎曼-西格尔公式简化成为：

$$Z(t) = 2\cos[\theta(t)] + R(t),$$

这就是我们此次围捕零点的工具。

在正式围捕之前，我们先做一点火力侦察——粗略地估计一下猎物的位置。我们要找的是使 $Z(t)$ 为零的点，直接寻找显然是极其困难的，但我们注

Riemann

意到 $2\cos[\theta(t)]$ (通常被称为主项) 在 $\theta(t) = (m+1/2)\pi$ 时为零 (m 为整数), 这是一个不错的出发点。由上节中 $\theta(t)$ 的表达式不难证明, 在所有这些使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的 $\theta(t)$ 中, $\theta = -\pi/2$ (即 $m = -1$) 是使 t 在 $0 < t < 25$ 中取值最小的, 它所对应的 t 为 $t \approx 14.5$ 。这是我们关于零点的第一个估计值。纯以数值而论, 它还算不错, 相对误差约为百分之三。

接下来我们对这个估计值进行一次修正。修正的理由是显而易见的, 因为 $t \approx 14.5$ 时 $R(t)$ 明显不为零。为了计算 $R(t)$ 我们注意到 $t \approx 14.5$ 时 $(t/2\pi)^{1/2} \approx 1.5$, 因此 $R(t)$ 中的参数 N [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的整数部分] 为 1, p [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的分数部分] 约为 0.5。由此可以求出 $R(t)$ 中的第一项—— $C_0(t/2\pi)^{-1/4}$ ——约为 0.3。

为了抵消这额外的 0.3, 我们需要对 t 进行修正, 使 $2\cos[\theta(t)]$ 减少 0.3。我们采用线性近似 $\Delta t \approx \Delta F(t)/F'(t)$ 来计算这一修正值。为此注意到 $2\cos[\theta(t)]$ 在 $t \approx 14.5$ 处的导数为

$$-2\theta'(t)\sin[\theta(t)] \approx -2(1/2)\ln(14.5/2\pi)\sin(-\pi/2) \approx 0.83.$$

由此可知 t 需要修正为 $t + \Delta t \approx 14.5 - 0.3/0.83 \approx 14.14$ 。这个数值与零点的实际值之间的相对误差仅为万分之四。但是需要提醒读者的是, 这种估计——无论它多高明——都不足以证明零点的存在, 它至多只能提供一个围捕零点的范围。

那么究竟怎样才能证明零点的存在呢? 我们在上节已经提供了方法。那就是通过计算 $Z(t)$ 的符号, 如果 $Z(t)$ 在某两点的符号相反, 就说明黎曼 ζ 函数在这两点之间存在零点。我们上面所做的估计就是为这一计算做准备的。现在我们就来进行这样的计算。由于我们已经发现在 $t = 14.14$ 附近可能存在零点, 因此我们在 $14.1 \leq t \leq 14.2$ 的区间上撒下一张小网。如果我们的计算表明 $Z(t)$ 在这一区间的两端, 即 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 具有不同的符号, 那就证

明了黎曼 ζ 函数在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在零点^[注 12.1]。下面我们就来进行计算:

对于 $t = 14.1$,

$$(t/2\pi)^{1/2} \approx 1.498027, \quad \theta(t) \approx -1.742722.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)] \approx -0.342160$, 剩余项 $R(t)$ 中 $p \approx 0.498027$, 从而其中第一项 (C_0 项) $C_0(t/2\pi)^{-1/4} \approx 0.312671$ 。由这两部分 (即主项及剩余项中的第一项) 可得:

$$Z(14.1) \approx -0.342160 + 0.312671 = -0.029489.$$

类似地, 对于 $t = 14.2$,

$$(t/2\pi)^{1/2} \approx 1.503330, \quad \theta(t) \approx -1.702141.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)] \approx -0.261934$, 剩余项 $R(t)$ 中 $p \approx 0.503330$, 从而其中第一项 (C_0 项) $C_0(t/2\pi)^{-1/4} \approx 0.312129$ 。由这两部分 (即主项及剩余项中的第一项) 可得:

$$Z(14.2) \approx -0.261934 + 0.312129 = 0.050195.$$

显然, 如我们所期望的, $Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 符号相反, 这表明在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在黎曼 ζ 函数的零点。当然, 我们还没有考虑 $C_1 \sim C_4$ 项。这些项中带有 C_0 的各阶导数, 计算起来工作量非同小可, 有违休闲的目的, 因此就不费心了。熟悉计算软件的读者可以用 Mathematica、Maple 或 Matlab 一类的工具来算一下。我们把所有这些计算结果都列在下表中:

	$t=14.1$	$t=14.2$
N	1	1
p	0.498027	0.503330
$\theta(t)$	-1.742722	-1.702141
$2\cos[\theta(t)]$	-0.342160	-0.261934
C_1 项	0.312671	0.312129
C_2 项	0.000058	0.000097
C_3 项	0.001889	0.001872
C_4 项	0.000001	0.000002
C_5 项	0.000075	0.000074
$Z(t)$	-0.027446	0.052042

注 12.1

要注意的是, $Z(t)$ 在一个区间的两端具有不同符号只是 Riemann ζ 函数在该区间存在零点的充分条件, 而非必要条件。换句话说, 假如我们不幸发现 $Z(t)$ 在我们所取的两点上具有相同的符号, 不能直接得出结论说 Riemann ζ 函数在这两点之间不存在零点。至于这是为什么, 请大家 DIY。

Riemann

从这些结果中可以看到，剩余项中的高阶项的贡献虽然有所起伏，但与第一项相比总体上很小。对于我们来说，这显然是很幸运的结果，因为否则的话，我们就得休闲不成反卖苦力了。这还是 t 较小的情况。随着 t 的增加，由于高阶项中所含 t 的负幂次较高，其贡献会变得越来越小 [注 12.2]，但要严格表述这种趋势并予以证明，却绝非轻而易举。事实上黎曼-西格尔公式作为 $Z(t)$ 的渐进展开式，其敛散性质与误差估计都是相当复杂的。

现在我们知道了黎曼 ζ 函数在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在零点。如果我们再仔细点，注意到 $Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 距离 $Z(t) = 0$ 的远近之比为 $0.027446:0.052042$ ，用线性内插法可以推测零点的位置为：

$$t \approx 14.1 + (14.2 - 14.1) \times 0.027446 / (0.027446 + 0.052042) \approx 14.1345.$$

这与现代数值 $t = 14.1347$ 的相对偏差只有不到十万分之二！即使只估计到 C_0 项（这是我们自己动手所及的范围），其误差也只有不到万分之二。

好了，猎物在手，我们的简短休闲也该见好就收了。大家是否觉得有点成就感呢？要知道，黎曼 ζ 函数的零点可是在黎曼的论文发表之后隔了四十四年才有人公布计算结果的哦。当然，我们用了黎曼-西格尔公式，但这没什么，一个好汉三个帮嘛，再说了，DIY 哪有真的百分之百从头做起，连工具设备都不包括在内的？想象一下，如果你 DIY 出来的陶器能够把缺陷控制在万分之二以内，那是何等的风光？当然，倘若你可以退回一百多年，把这个结果抢在格拉姆（Jørgen Gram, 1850-1916）之前公布一下，那就更风光了。

在本节最后，还有一件可能让大家有成就感的事要提一下。那就是我们所用的估计零点的方法——即从使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的点出发，然后依据 $R(t)$ 的数值对其进行修正 [注 12.3]，最后用 $R(t)$ 的符号来确定零点的存在，暗示黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零

点数目大致与 $\cos[\theta(t)]$ 的零点数目相当。而后者大约有（请大家 DIY） $\theta(t)/\pi \sim (t/2\pi)\ln(t/2\pi) - (t/2\pi)$ 个。不知大家是否还记得，这正是我们在第五节中介绍过的黎曼的三个命题中迄今无人能够证明的第二个命题！当然，我们这个也不是证明（真可惜，否则的话，嘿嘿...），但这应该使大家对我们休闲手段之高明有所认识吧？

1.3 从纸笔到机器

黎曼-西格尔公式的发表大大推进了人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算。如我们在前两节所看到的，黎曼-西格尔公式中的求和项数是由 $n^2 < (t/2\pi)$ 确定的，这表明用黎曼-西格尔公式计算一个位于 $s = 1/2 + it$ 附近的零点所需的计算量为 $O(t^{1/2})$ 。而在这之前人们所用的欧拉-麦克劳林（Euler-Maclaurin）公式计算同样的零点所需的计算量约为 $O(t)$ 。这两者的差别——也就是黎曼-西格尔公式相对于欧拉-麦克劳林公式的优越之处——随着 t 的增大而变得越来越明显。

黎曼-西格尔公式发表大约四年后，哈代（Godfrey Hardy, 1877-1947）的学生、英国数学家蒂奇马什（Edward Titchmarsh, 1899-1963）成功地计算出了黎曼 ζ 函数前 1041 个零点的位置，它们全都位于 critical line 上。这是十一年来数学家们首次突破我们在第八节提到过的由哈奇森（J. I. Hutchinson）于 1925 年创造的 138 个零点的记录。蒂奇马什的工作在黎曼 ζ 函数非平凡零点计算史上的地位是双重的：从计算方法上讲，它是数学家们首次用黎曼-西格尔公式取代欧拉-麦克劳林公式进行大规模零点计算；从计算手段上讲，蒂奇马什的计算使用了英国海军部用来计算天体运动及潮汐的一台打孔式计算机（punched-card machine），这是数学家们在零点计算上首次用机器计算取代传统的纸笔计算。这两个转折是数学与技术相辅相成的结

注 12.2

但另一方面，随着 t 的增加，Riemann-Siegel 公式中的求和所包含的项数会逐渐增加，因此计算的总体复杂度并不呈现下降趋势。

注 12.3

对于求和中有不止一项的情形，修正所依据的不仅仅是 $R(t)$ ，但思路是类似的。

Riemann

果，它奠定了直到今天为止人们对黎曼 ζ 函数非凡零点进行计算的基本模式。

蒂奇马什之后零点的计算因第二次世界大战的爆发中断了十几年。战后最先将计算推进下去的是著名的英国数学家图灵（Alan Turing, 1912-1954）。图灵其实早在战前就对黎曼猜想产生了兴趣。与当时许多其他年轻数学家一样，图灵对希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）的数学问题很感兴趣，这其中又尤以第十问题与第八问题（黎曼猜想是第八问题的一部分）最让他着迷^[注 13.1]。他后来主要的研究都是以这两个问题为主轴展开的。1936年图灵到普林斯顿大学读研究生，在那里见到了来访的哈代——他原本希望能在普林斯顿见到哥德尔（Gödel, 1906-1978），可惜后者当时已经去了欧洲。那时哈代对黎曼猜想的态度已经相当悲观。这种悲观情绪对图灵产生了影响，他觉得这么多年来所有证明黎曼猜想的努力都归于失败，也许是到了换个角度思考问题的时候了。人们一直无法证明黎曼猜想，也许并非因为它太难，而是因为它根本就不成立！

一个数学命题，它的成立需要证明，不成立同样需要证明。假如黎曼猜想真的不成立，我们怎样才能证明这一点呢？我们当然可以试图从数学上直接证明其不成立，这是一种方法。但还有一种办法，那就是找到一个反例，即找到一个不在 critical line 上的零点。这种方法的好处是不在乎多少，只要一个反例就足够了。被后世誉为“计算机与人工智能之父”的图灵显然对后一种方法情有独钟。当时图灵已经提出了后来以他名字命名的图灵机的概念。很自然的，他希望建造一台机器来计算零点。但是这一工作起步不久，英国就卷入了二战，图灵开始参与英国情报部门破译德军密码的工作，建造机器的计划被搁置了下来。战争结束后，图灵渐渐恢复了建造机器及计算零点的计划。图灵虽然是以其对计算机及人工智能领域的卓越贡献著称的，但他在传统数学领域也有相当深厚的功力，早在读本科的

时候，他就曾独立证明了概率论中著名的中心极限定理（可惜比 J. W. Lindeberg 晚了十余年）。在建造机器的同时，图灵对计算零点的数学方法也进行了研究，并做了一些改进。

经过几年的努力，到了二十世纪五十年代初，图灵终于完成了他的机器，并且比创造战前记录的蒂奇马什略进一步，计算出了前 1104 个零点。不过他试图寻找黎曼猜想反例的努力并不成功，因为所有这些零点全部位于 critical line 上，黎曼猜想在他计算所及的范围内岿然不动。在那之后，图灵的机器坏掉了。几乎与此同时，他的个人生活也遭遇了极大的挫折。他于 1952 年被控犯有当时属于违法的同性恋行为，受到强制药物治疗及缓刑的处罚。两年后 he 被发现因氰化物中毒死于寓所。多数人相信他是自杀^[注 13.2]。

在图灵之后，随着计算机发展的加速，数学家们对零点的计算也越来越快。1956 年，D. H. Lehmer 计算了前 25000 个零点；两年后 N. A. Meller 把这一记录推进到了 35337 个零点；1966 年，R. S. Lehman 再次刷新记录，他计算了 250000（二十五万）个零点；三年后这一记录又被 J. B. Rosser 改写为 3500000（三百五十万）…

黎曼 ζ 函数的零点计算步入了快车道！



最昂贵的葡萄酒

验证了三百五十万个零点虽不足以证明什么，但对黎曼猜想还是有着一定的心理支持作用。不过许多数学家对这点心理支持作用很不以为然，其中有一位数学家最为突出，不仅不以为然，而且还“顶风作案”，跟同事打赌！

这位打赌的数学家是德国波恩马克·普朗克数学研究所（Max Planck Institute for Mathematics）的查

注 13.1

Hilbert 第十问题是：给定一个具有任意多未知数的 Diophantine 方程，设计一个过程，能用有限多次运算确定该方程是否具有整数解。Turing 对计算机及人工智能的研究与此有着密切的关系。

注 13.2

图灵与约翰·纳什（影片《美丽心灵》的主角）颇有相似之处：两人都对纯数学有浓厚的兴趣，研究成果却对应用领域影响深远；两人都对物理学有过一些兴趣；两人都有为军方服务的经历；两人后来的精神世界都偏离了常轨…