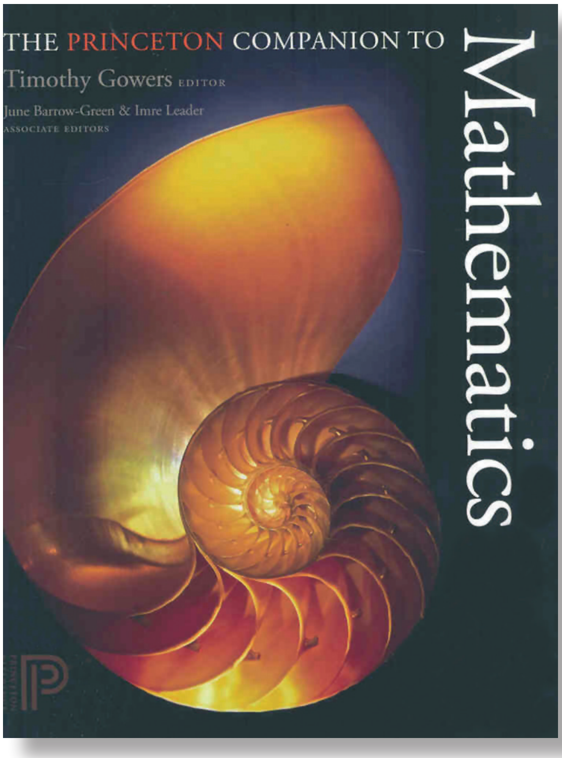
现代数学主要分支学科的通俗介绍

——读《普林斯顿数学指南》

陈跃



《普林斯顿数学指南》获得2011年美国数学协会欧拉图书奖

20世纪是数学飞速发展的世纪，尤其是在20世纪的下半叶，数学知识出现了前所未有的大爆炸。如今的现代数学真正成为了人类知识领域中最博大精深的一个，其抽象与艰深的程度登峰造极，这对任何学习现代数学的人们来说都是巨大的挑战。

回想五十多年前，前苏联一批数学家为了普及近代数学知识，为当时的学生撰写了一套三卷的名著《数学——它的内容、方法和意义》[1]。这套书主要是讲在18与19世纪中形成的近代数学，它分章通俗介绍了以下17个分支学科，包括数学分析（即微积分）、平面与空间解析几何、代数方程理论、常微分方程、偏微分方程、曲线和曲面的微分几何、变分法、复变函数论、初等数论、概率论、函数逼近法、实变函数论、线性代数、非欧几何、拓扑学、泛函分析、抽象代数等。这套名著抓住这些分支学科的最基本的思想，深入浅出地通俗介绍这些学科的研究方法。这套书被译成中文后受到普遍欢迎，多次再版，可以说影响了国内整整一代数学家的成长。我们可以看到，这套书给出的这个近代数学分支学科的基本框架实际上就是以后几十年为大家所熟悉的大学数学专业的课程体系。它大致反映了数学这个学科从18世纪到20世纪初期的发展进程和主要成就。

时代发展到今日，虽然这套书对于数学专业本科生的教育还有一定的作用，但对于研究生阶段学习的现代数学来说，显然已经不够用了。令人高兴的是现在已经有了一个很好的替代读物。由美国普林斯顿大学出版社在2008年出版的《普林斯顿数学指南》[2]（The Princeton Companion to Mathematics，以下简称《指南》）是一本帮助现代数学初学者的综合普及类工具书。这本书的篇幅厚达一千多页。它不同于一般百科辞典的地方是：尽量用通俗浅显的语言和历史途径法[3]来深入浅出地讲解现代数学中一些最基本的思想和方法（而不是面面俱到地给出所有数学名词的解释），以及现代数学想要解决的主要问题，并且在讲解的时候适当地降低数学表述的准确度。这样就很好地满足了学生们释疑解惑的需要，同时也改变了人们“现代数学不大可能通俗介绍”的想法。

这本《指南》总共包括“（一）引言”、“（二）现代数学的起源”、“（三）数学概念”、“（四）现代数学的分支”、“（五）定理与问题”、“（六）数学家”、“（七）数学的影响”和“（八）看法与建议”等八个部分。其中第一部分和第八部分是用平易的语言向学生介绍现代数学大致包含的内容、研究数学所要达到的目标以及对于学习现代数学的建议，第二和第六部分简要介绍了数学发展的历史以及重要数学家的生平，第七部分则非常全面地介绍了数学对自然科学和社会科学的

各种应用和影响。整本《指南》最重要的部分当然是介绍现代数学各主要分支学科的第四部分，而第三和第五部分则是进一步解释第四部分所涉及的一些现代数学最基本概念和最重要定理的具体内涵。

《指南》的第四部分在介绍现代数学的各主要分支学科时，按照 20 世纪现代数学历史发展的主要线索，力求通俗地介绍现代数学各主要分支学科所要解决的问题和一些具有代表性的成果。为此《指南》尽量减少使用高深的专业术语，并且选取对解决研究生专业基础课教学难点有帮助的历史素材和至关重要的思想方法，努力还原被擦去的数学家“走过的痕迹”。不过，在《指南》第四部分极其有限的三百多页的篇幅内，只能对现代数学各主要学科中极少的基本内容来进行解说。

《普林斯顿数学指南》主编 Timothy Gowers 是剑桥大学教授，1998 年菲尔兹奖获得者

在现代数学众多的分支学科中，《指南》着重强调了数论、代数几何、拓扑学、表示论等基础分支学科的重要性，这是特别值得我们注意的。根据 20 世纪数学发展的主要潮流和在未来的发展前途，该书认为现在的学生应该着重学习的现代数学分支学科依次为：代数数论、解析数论、计算数论、代数几何、算术（代数）几何、代数拓扑、微分拓扑、参模空间、表示论、几何与组合群论、调和分析、偏微分方程、广义相对论、动力系统、算子代数、镜像对称、顶点算子代数、代数组合学、概率组合学、计算复杂性、数值分析、集合论、逻辑与模型论、随机过程、概率模型和概率模拟等 26 门分支学科。这与目前我们国内对现代数学分支学科的划分与强调有不小的差异。我们比较重视让学生学习偏微分方程、计算数学、泛函分析、微分几何等比较传统经典的学科。但是另一方面，对数论、代数几何以及拓扑学等主流的基础学科，我们缺乏必要的关注与投入。这其实也是导致我国基础数学研究水平还处于较低层次的一个主要原因。例如目前在国内上百所设置了数学专业的高校中，只有个别几个学校能够开设基础的代数几何课程，而我国迄今为止由国内学者写的代数几何基础的中文教材只有一本[4]。

《指南》对于现代数学主要分支学科的这种强调的重要意义在于：它能帮助现代数学的初学者拓展学习的视野，从整体上了解日趋统一的现代数学的来龙去脉，为以后的学习与研究打下坚实的基础，并且能够从浩如烟海的数学文献中辨别出现代数学进一步发展的可能方向。

以下仅对《指南》第四部分中位于前面的一部分现代数学基础分支学科的内容作一些简要的分析与说明。

代数数论 代数数论是一门运用抽象代数的方法来研究代数数域和代数整数环的算术性质的分支学科。《指南》按照数论发展的历史途径，从古典的二次无理数逼近问题逐步引入二次代数整数环的概念，然后直接讨论其至关重要的唯一分解问题，这是因为在历史上试图证明费马大定理而导致人们关注这一重要问题。为了弄清楚影响唯一分解性质的障碍，《指南》用具体的计算例子介绍了高斯的重要发现：即可以用二元二次型来度量二次代数整数环是否具备唯一分解的性质，以及如果不具备的话在何种程度上具备。由此引入戴德金非常基本的理想概念，它可以将二元二次型所涉及的繁琐计算逐步转化为理想的运算，并且还能非常自然地形成理想类群和理想类数这两个更抽象的概念，以便于用来衡量是否具备唯一分解性质。《指南》详细介绍的另一个衡量唯一分解性质的工具是经典的椭圆模函数，它在某些代数整数上的取值也是代数整数，这就引出了克罗内克希望的将某些他感兴趣的代数数表示成某些解析函数的值的“青春之梦”，也就是将代数数论与经典代数几何统一起来的梦想。这个梦想实际上也就是后来现代代数几何产生的萌芽，并且随着群表示论的加入，最终导致产生了庞大的 Langlands（朗兰兹）猜想（或 Langlands 纲领）。

解析数论 与代数数论关注不定方程的精确解不同，解析数论着重于研究如何获得数论函数的好的近似，为