安德烈·塞迈雷迪的工作

W. T. Gowers/ 文　史永堂 / 译

1. 引言

安德烈•塞迈雷迪是数学中组合数学领域的杰出人物，特别是在极值组合论这一子领域做出了重要的贡献。稍后我将解释这些术语的意思，但是这里我们首先来介绍一下关于他非凡数学成就的一些枯燥的事实。他的最著名的成就是，在 1975 年给出了众所周知的埃尔德什（Paul Erdös）和 Turán 提出的一个具有几十年历史的猜想的证明，现在被称为是 Szemerédi 定理。这个定理不仅是二十世纪数学的重要贡献之一，而且也是当前大量研究的核心所在。他给出的 Szemerédi 正则引理，是源于 Szemerédi 定理证明的一个结果，但是也已经逐渐成为极值组合论的一个重要工具。除此之外，他已经发表了 200 余篇论文，其中很多论文都描述了重要的进展。我将会选择其中一两个问题来讲解，但是我们应该知道的是，它们仅仅是对很多领域的数学思想有深远影响的巨大成就中的一个小的例子。

那么，什么是组合数学呢？一个可能的定义是组合数学是来研究离散结构的。那么什么是离散结构呢？“离散”这个词是跟“连续”对应的：一个结构是连续的，如果你可以从一个部分平滑地移动到另一部分；如果你不得不跳跃，就是离散的。例如，如果你在建立流体流动的模型，那么你研究的数学结构将是连续的，因为你将考虑类似于不同点的速度和压力的一些东西，并且这些是平滑地变化的。相反地，如果你在建立计算机内部东西的模型，那么你将会对 0-1 序列感兴趣，这是离散结构的一个例子，因为要从一个这样的序列得到另一个序列，你将不得不从 0 跳到 1 至少一次，反之亦然。

另一个离散结构，也许是组合数学中的一个最重要的结构，是图。它包含一些点，以及连接某些点的线。点称为顶点，线称为边。

你可能会认为图是连续的，因为你可以沿着它的边连续地移动。然而，连续的仅仅是图片，而不是图本身。对一个图，我们所关心的是，顶点中的哪些对是由边连接的，这可以被看作为一个简单的列表。例如，如果一个图由一个正方形的顶点和边构成，我们可以称它的顶点为 a, b, c, d，边记为 ab, bc, cd, da。

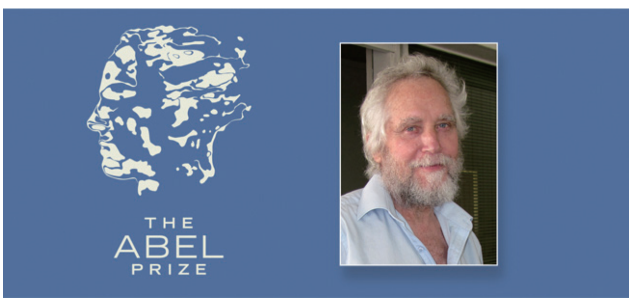
2. Szemerédi 定理

并不是离散结构的所有研究都被划为组合数学。大部分题目的另一个特征是这些问题都可以以容易理解的方式叙述，至少要比许多其他领域的问题要容易得多。同样，证明经常是初等的，不是像歇洛克•福尔摩斯那样用到整个世界，而是仅仅用到某种数学。当一个数学家描述某个证明是初等的时候，这意味着证明不会用到深层次的概念，或者不依赖于之前建立的某些复杂的结果。但是我们不应该认为这意味着证明是简单的：人们可以以极其复杂的方式将一些初等的元素放在一起，而且有些“初等的”证明在数学中是困难的。相反地，一些很高级的证明，当你花足够的时间去理解它们所依赖的定理时，实际上可能是非常简单的。（当然，也确实存在一些简单的初等证明以及困难的高级证明。）

Szemerédi 定理是对我刚才所讲内容的一个完美的解释。它有一个吸引人的叙述，并且塞迈雷迪给出的证明既是初等的又是极其困难的。让我以解释定理的内容开始讲起。

为了讲解定理的内容，我需要等差级数（或称为算术级数）的概念。一个等差级数是指一个数的序列，每一项都增加相同的大小（称为公差）。所以序列 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 是一个等差级数，它的公差为 6，而序列 4, 7, 11, 14, 17, 21 不是等差级数，因为相邻两项的差是不相同的（有些是 3，有些是 4）。

一种理解 Szemerédi 定理的方法是去想象下面的单玩家的比赛。告诉你一个比较小的数字，比如是 5，和一个大的数字，比如是 10000。你的任务是在 1 和 10000 之间尽可能地选择尽量多的整数，你要遵守的规则是你所选的整数中不



阿贝尔委员会关于塞迈雷迪获奖的海报

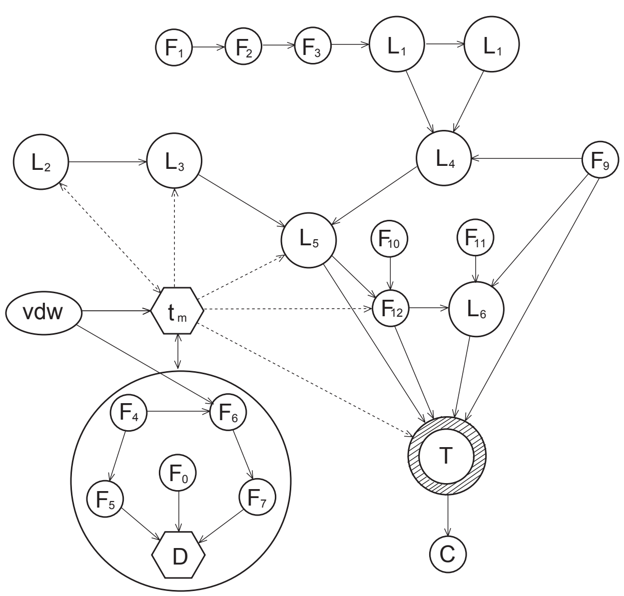
应该包含 5- 项的等差级数。举例来说，如果你碰巧选择了数字 101, 1103, 2105, 3107 和 4109（以及一些其他的数字），那么你将输掉比赛，因为这五个数字构成了一个五项的等差级数，他们的公差是 1002。

显然地，最终你是注定要输掉这个比赛的，因为我们可以给出一个既初等又极其简单的证明，如果你要保持足够长的选择，最终你将选择 1 到 10000 中的所有数字，这将包含许多 5- 项的等差级数。但是 Szemerédi 定理告诉我们一些更有趣的事情：即使你使用最好的回避等差级数的策略，在你远远还没接近选择所有数字之前，你就已经输掉比赛了。

为了更准确地叙述这个结果，我将需要一点代数的知识，我的意思是希望用两个字母来表示我们开始时的那两个数字。用 k 表示我们希望避免的级数的长度，n 表示我们希望从中选择的初始数字的个数。（在我们上面的讨论中，k 是 5，n 是 10000。）现在用 $S(k, n)$ 表示在避免 k- 项等差级数出现的前提下，所能选择数字的最大数目。塞迈雷迪证明了：当 n 很大时，$S(k, n)$ 是 n 的一个非常小的百分数。那么有多小呢？要多小有多小，只要假设 n 是足够大的。

例如，如果你尝试去回避长为 23 的级数，Szemerédi 定理告诉我们存在某个 n（可能非常巨大，但是它是存在的）满足下面的条件：如果我们用 n 个数字来玩比赛，在我们输掉比赛之前，我们不会选择多于 n/1000 个数字，即总数的 0.1%。而且，这个结果对任何其它的级数长度和任何其它的正的百分数都是成立的。

那么怎么去证明呢？这里我不打算去告诉你，我将再次说明从技巧意义上来说那是初等的，并且我将从塞迈雷迪的原始文章中复制一个图表来尝试使你相信这也是困难的。



3. 为什么我们要关心等差级数的寻找呢?

我在现实生活中并没有看到如下情形的重要性：一个小的整数集合包含一个长为 10 的等差级数。即使出现这种情形，Szemerédi 定理告诉你你所需要的 n 将会远远大于宇宙中原子的数目，或者是这个数字的指数。这将使定理远离任何实际应用的领域。那么，数学家们到底发现了 Szemerédi 定理的哪些方面是如此的迷人呢？

对这个问题，有很多回答。最显而易见的是，Szemerédi 定理叙述的简单与其证明（以及所有随后发现的证明）的困难之间的对比。通常情况下，一个简单的、自然的数学陈述要么有一个简单的证明，要么有一个简单的反例。然而，有些时候人们惊奇地看到：一个形式无误的问题的解决要远比人们的期望困难得多。这些问题中的大部分被证明太难了，以至于没有人相信在与当前完全不同的新思想出现之前它们将能够被解决（e+π 是否是无理数的问题就是一个例子）。但是有些问题不是这样的：问题的提出很简单并且难于回答，但是它们跟某些问题有足够的联系，使得人们感觉尝试解决它们并不是完全没有希望的事情。Erdös-Turán 猜想就可以归于这一类。

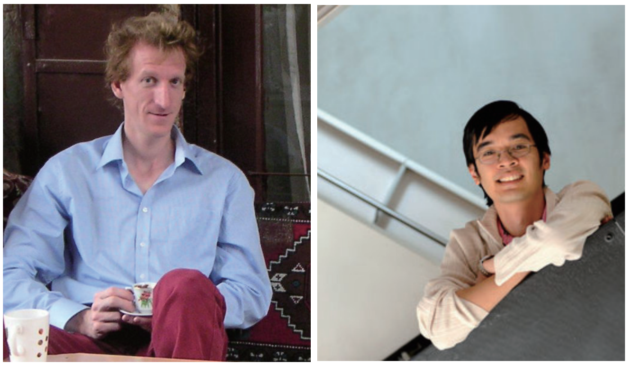
第二个回答是，Szemerédi 定理有很多数学的应用，尽管它没有什么实际的应用。其中非常著名的是 Ben Green 和陶哲轩的一个定理：你可以发现仅包含素数的任意长的等差级数。这个结果并不是直接源于 Szemerédi 定理，但是 Green 和陶哲轩发现了一个极其巧妙的方法将他们的问题转化为一个可以用 Szemerédi 定理来解决的形式。

然而，如果你坚持要求实际应用的话，那么一切并没有丢失，只要你能够接受非直接的应用而不是直接的应用。数学的一个重要的但不值得充分赞赏的方面是，你要证明的结果往往没有你证明它所用的方法更有意思。这一趋势在组合数学中尤为明显，组合数学中的一些公开问题往往越来越受关注，不是因为我们渴望知道它们的答案，而是因为它们包含了许多更一般的困难，这些困难让我们感觉到我们又真正地回到了数学。当一个这样的问题得到解决时，它的解常常包含新的数学工具的发展，这些新的工具能够在许多其他情况下得到使用。

Szemerédi 定理就是这种现象的一个奇妙的解释，正如我们将要看到的。

4. Szemerédi 正则引理

到目前为止我还没有讲什么是极值组合论，那么现在让我开始讲。这里有一个极值图论的问题：如果一个图有 n 个顶点，那么在保证任意三个点都不构成三角形的情况下，它可以有多少条边呢？一般来说，极值组合论中的问题是在



Ben Green(左) 和陶哲轩著名的数论工作用到了 Szemerédi 定理

限制某些其他情况发生的前提下，问某个量可以达到多大。Szemerédi 定理本身就是另外一个这样的例子，它描述了一个这样的问题：在限制长为 k 的等差级数出现的情况下，你可以从 1 到 n 中选择多少个数字。

这些问题自然地分为两部分。一部分是去寻找能够避免你希望避免的结构的例子，以这样的方式使得你感兴趣的量能够尽可能的大。另一部分是去证明如果问题中的量达到某个数值，那么你将不能避免你希望避免的结构。埃尔德什的一个深刻的观察，在很多情况下是解决第一部分问题的一个出奇得好的方法，即去随机地选择你的结构。例如，如果你的结构是 n 个顶点的图，如果每对顶点 x 和 y 是否有边相连仅仅是靠投掷硬币来决定（如果你希望你的随机图包含很少的边，那么你可以使用一枚扁的硬币），那么对某些问题，你将得到非常好的解答。尽管看起来你可能对随机定义的结构不能说什么，但是如果你正在寻找完全确定的事情，那么这差不多是正确的。然而，如果我们仅仅要求接近确定的事情，那么我们就有很多可以说的了，这正是我们要讲的。如果我们可以说一个随机选取的结构几乎确定地具有我们希望的性质，那么我们就可以给出一个弱得多的结论：至少存在一个结构具有我们希望的性质，这样就足够了。

埃尔德什的观察诞生了随机图论，现在已经成为组合数学的一个主要的子领域。作为一个结果，组合数学家们不认为随机图是讨厌的、混乱的东西，而认为从许多方面来说都是容易理解的东西。为了更清楚地表达，我不再说随机图论是一个容易的领域：如果你问关于一个随机图的足够详细的问题，那么回答它们需要非常精密的、困难的概率估计。但是随机图在以下方面具有重要意义，随机图（几乎总）是可预言的并且效果良好。

由于这一背景，Szemerédi 正则引理应该得到大家理解。在介绍正则引理之前，我们假设图被认为是没有结构的东西。最后，当你介绍一个图时，对每对顶点 x 和 y 你需要决定是否用一条边连接它们，并且你的决定没有任何限制。然而塞迈雷迪意识到，一旦你丢掉你对随机性的恐惧，你就可以对完全任意的图给出一个有用的结构描述。

在这里我不能给出这个结果的一个精确的叙述，但是大致的思想是这样的。给定任意一个图，存在一种如下的方式将它的所有顶点划分为一些集合，这些集合的数目比较小：如果你取出连接其中任意两个集合的边，那么它们看起来像是被随机选择的（事实上，尽管这个大致的思想是过于简单的，但是对这些目的它将起作用）。简言之，每个图都是由数目很少的随机图构成的。

这告诉我们，可以使用很小数目的数据来给我们的图一个好的刻画：将顶点划分成引理告诉我们的一些集合，我们只需要粗略地说每对集合之间有多少条边，并且我们知道这些边是以一种看起来随机的方式分配的。这并不能确切地告诉我们这个图是什么样子的，但是更多情形下两个随机图的差别是不重要的，因为它们都是随机的，所以它们都具有你希望一个随机图所具有的性质。

Szemerédi 正则引理很快成为，并且现在仍然是极值图论的一个核心的工具，它的间接的影响，如随后的许多变形和推广，仍然非常广泛。

我许诺过要讨论正则引理的一些间接的实际应用。所以让我以一个具有明显实际重要性的人工智能问题开始，然后回到正则引理。没有人可以否认：如果有人可以设计一个能够从经验中学习的计算机程序，那么这个程序将有无数的实际应用。试图去做这件事的人工智能的一个分支称为机器学习。一个被称为 PAC 学习的著名的抽象模型是由 Leslie Valiant 提出的，是研究机器学习的一种好的结构。[字母 PAC 代表"probably approximately correct"(概率近似正确)]。这引出了一个被归入一般性能测试的纯数学的问题。粗略地讲，你有一个结构，你希望去证明它要么有某个性质，要么它可能非常类似于一个不具有这个性质的结构。例如，给你一个图，让你去证明它包含一个三角形，或者它跟一个不包含三角形的图只有略微的不同。从机器学习的角度来看，我们感兴趣的是这些通常可以被格外快地处理：程序会执行很小数目的一些简单的测试，然后形成一个可靠的假设（也就是，一个概率近似正确的假设）。允许我们去证明这件事的工具是什么呢？那就是 Szemerédi 正则引理。

5. 排序

塞迈雷迪也因成为 Miklos Ajtai, Janos Komlos 和 Endre Szemerédi（简称 AKS）三人之一而著名。我将论述他们工作的两个最著名的部分，但是我必须强调这只是一个小样本。当我说"最著名"的时候，我的意思是类似于高速公路上的光线：它们非常的昂贵，但是它们也非常的多。

计算机科学中的一个古老的话题是排序算法。给你一