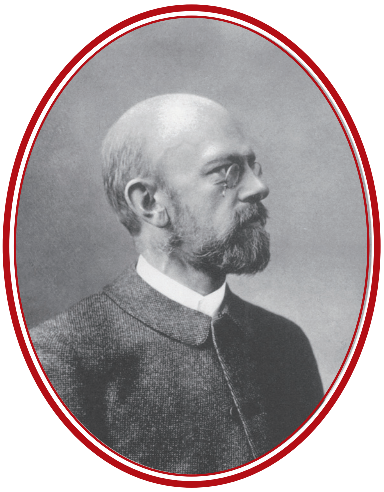


希尔伯特第十问题漫谈

卢昌海

1. 问题

数学问题是数学中最具魅力的部分之一，并且也是数学史上许多思想和进展的重要源泉。据说有人曾建议德国著名的数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）去解决费马猜想（Fermat's conjecture），以夺取为这一猜想而设的沃尔夫斯凯尔奖金（Wolfskehl Prize），希尔伯特却笑了笑回答说："我为什么要杀掉一只会下金蛋的鹅呢？"在希尔伯特看来，一个像费马猜想那样的数学问题对数学的价值是无可估量的。希尔伯特不仅舍不得"杀鹅"，还怀着极大的热诚为 20 世纪的数学界做了一回"寻鹅之人"。1900 年，在于巴黎举办的第二届国际数学家大会上，希尔伯特做了一次堪称数学史上影响最为深远的演讲，演讲的题目叫做"数学问题"（The Problems of Mathematics）。在那次演讲中，希尔伯特列举了 23 个他认为最具重要意义的数学问题[1]。那些问题被后人称为"希尔伯特问题"（problems of Hilbert）。自那次演讲之后，解决希尔伯特问题成了许多数学家终生为之奋斗的目标，而在解决这些问题的过程中源源不断产生出来的"金蛋"，则为 20 世纪的数学发展注入了极大的生机和活力。

在本文中，我们就来讲述有关这些数学问题中第十个——即所谓"希尔伯特第十问题"——的一些故事。

希尔伯特第十问题是一个与解方程有关的问题。 解方程大家都不陌生，在中学时我们就已解过许多简单的方程，比如 $2x-2y=1$，$x^2+y^2=z^2$，等。我们所举的这两个简单方程有一个共同特点，那就是都只包含未知数的整数次幂，

[1] 这 23 个问题中有一些——比如第八问题——不是单一问题。另外， 这些问题是以演讲的文稿而非演讲本身为依据排列的， 希尔伯特在演讲中直接提及的只有其中的 10 个问题（本文所述的第十问题不在其中）。

而且系数也都是整数，这类方程被称为整系数代数多项式方程。数学家们对这类方程的研究有着漫长的历史。

在公元 3 世纪的时候，古希腊数学家丢番图（Diophantus, 200?-284?）发表了一部长篇巨著，叫做《算术》（*Arithmetica*）。 这部著作共有 13 卷，经过 1700 余年的漫长岁月，目前被公认流传于世的有 6 卷[2]。丢番图在这部著作中对整系数代数多项式方程进行了大量研究，那些研究对代数与数论的发展有着先驱性的贡献。后人为了纪念他，把整系数代数多项式方程统称为丢番图方程（Diophantine Equation），而丢番图本人，则被一些人尊称为代数学之父。

对于丢番图方程，数学家们最感兴趣的一个传统问题乃是它是否有整数解（或自然数解）。对于简单的丢番图方程来说，这是很容易找到答案的，比如上面提到的 $x^2 + y^2 = z^2$ 有整数解（早在 3000 多年前，中国古代的数学家就知道这个方程的一组特解：即“勾三股四弦五”）；另一方面，$2x - 2y = 1$ 则没有整数解（因为方程的左边为偶数，右边却为奇数）。但对于一般的丢番图方程来说，判断它是否有整数解却往往是一件极其困难的事情，其中最著名的例子就是上面提到过的费马猜想，即 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时没有非零整数解，它是在隔了 300 多年后才得到的证明[3]。

长期以来，人们对丢番图方程是否有整数解的研究都是针对特定形式的丢番图方程进行的。但是，人们显然也可以提出这样一个问题，即有没有办法对任意形式的丢番图方程是否有整数解进行研究？或者更具体地说，是否能找到一种普遍的算法（algorithm），可用来判定一个任意形式的丢番图方程是否有整数解，从而一劳永逸地解决这类问题？这就是著名的希尔伯特第十问题。这样的问题在数学上被称为判定问题（decision problem），因为它寻求的是对数学命题进行判定的算法。

希尔伯特是一位对数学充满乐观信念的数学家。在他提出希尔伯特第十问题的时候，虽然没有明确表示那样的算法一定存在，但他没有用“是否存在那样的算法”作为问题的表述方式，而是直接要求数学家们寻找那样的算法，可见他对存在一个肯定的答案怀有期待。这种期待与他在其他方面对数学所表示出的乐观看法是一脉相承的。

但是，数学的发展却往往是像希尔伯特那样的数学大师都无法预料的。

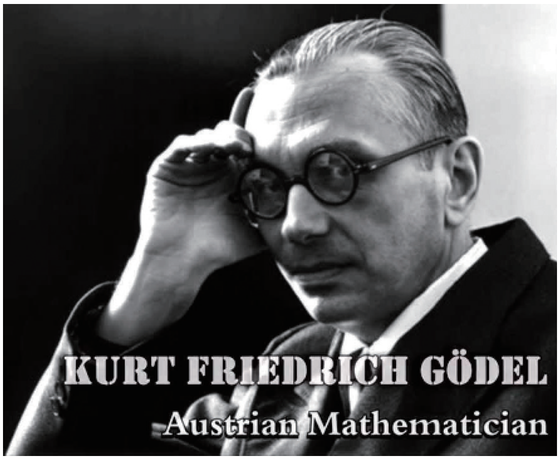
2. 算法

希尔伯特第十问题要求寻找判定丢番图方程是否有解的算法。但究竟什么是算法呢？ 在希尔伯特提出问题之时却其实并不存在一个明确定义。这是研

[2] 除公认的 6 卷外，另有 4 卷发现于 20 世纪的阿拉伯文抄本也被认为有可能是丢番图《算术》或其注释本的译本。

[3] 细心的读者可能会注意到，在本文中我们没有对整数、正整数及自然数（零及正整数）等做出区分。这是因为可以证明，对于希尔伯特第十问题来说，把解限定在这些数集的任意一者中都是等价的。

究希尔伯特第十问题所遇到的第一个困难。这一困难使得希尔伯特第十问题在提出后整整 30 年没有取得任何实质进展。



逻辑学大师哥德尔

对算法的研究直到 20 世纪 30 年代开始才逐渐深入起来。

什么是算法呢？粗略且顾名思义地讲，算法就是（通过有限多的步骤）对数学函数进行有效计算的方法。反过来说，如果一个数学问题能够通过可以有效计算的数学函数得到答案，那么我们就称这一数学问题存在算法。因此算法研究的一个重要的切入点便是寻找可以有效计算的函数。但是，到底什么样的函数是可以有效计算的呢？一开始数学家们并没有普遍结论，只知道一些最简单的函数（比如常数函数），以及用那些函数通过若干简单规则（比如相加）组合出来的函数，是可以有效计算的。数学家们将这类函数称为递归函数（recursive function）。

1931 年，年轻的法国数学家赫尔布兰德（Jacques Herbrand, 1908-1931）对递归函数进行了研究，并给著名逻辑学家哥德尔（Kurt Gödel, 1906-1978）写信叙述了自己的研究结果。不幸的是，哥德尔当时正处于自己一生最重大的成果——哥德尔不完全性定理（Gödel's incompleteness theorems）——的研究期间，没有立即对赫尔布兰德的工作做出回应[4]。更不幸的是，那年的夏天，年仅 23 岁的赫尔布兰德在攀登阿尔卑斯山时不幸遇难，他的工作因此被暂时埋没了起来。

与赫尔布兰德的研究差不多同时，在 20 世纪 30 年代初的时侯，美国普林斯顿大学的逻辑学家丘奇（Alonzo Church）也在积极从事逻辑及算法的研究，并且发展出了一套新的逻辑体系。他并且让自己的两位学生——克林（Stephen Kleene, 1909-1994）与罗瑟（John Rosser, 1907-1989）——对该逻辑体系做进一步的细致研究。他这两位学生都是第一流的学生，克林更是后来自己也成为了第一流的逻辑学家，他们的研究很快就有了结果，但这结果却大大出乎丘奇的意料：他们发现丘奇的那套体系竟然是自相矛盾的！自相矛盾的逻辑体系只能有一个命运，那就是被放弃。但幸运的是，丘奇的那套体系中有一个

[4] 哥德尔给赫尔布兰德的回应只是不够“立即”，而非没有。他的回信写于 1931 年 7 月 25 日，赫尔布兰德遇难的时间则是 7 月 27 日，只相隔了两天，赫尔布兰德没来得及收到回信就去世了。