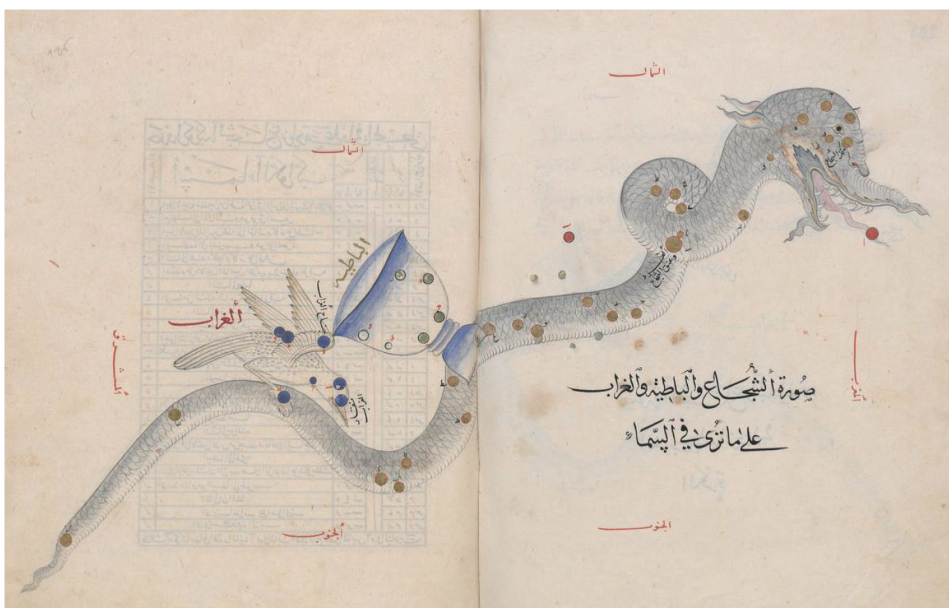
中世纪阿拉伯代数学

郭园园

谈到中世纪阿拉伯代数学，我们首先了解一下中世纪的阿拉伯数学。中世纪的阿拉伯数学指的是公元 8-15 世纪在伊斯兰教及其文化占主导地位的地区，产生、发展和繁荣起来的数学理论和数学实践。从地理疆域上看，中世纪伊斯兰世界的范围从伊比利亚半岛开始，穿过北非和中东，到达亚洲的中部。尽管这一时期的数学著作是由包括波斯语、土耳其语、希伯来语等在内的众多语言写成，但是绝大多数著作采用阿拉伯语进行书写。[1]



欧麦尔 • 苏菲（Umar al-Sufi, 903-986）著《恒星图鉴》书影

[1] Berggren, J. L. "Mathematics in Medieval Islam", in Victor J. Katz, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook* (Second ed.) Princeton, New Jersey: Princeton University, 2007. p515.

公元 3-7 世纪，萨珊波斯帝国（Sassanid Empire, 224-651）和拜占庭帝国（Byzantine Empire，395-1453）为争夺东方商路和小亚细亚，进行了长达四百年的战争。战争的破坏、商路的改变导致阿拉伯半岛经济衰退、阶级矛盾激化，此时各阶层都有建立统一国家的愿望。公元 7 世纪上半叶，阿拉伯人崛起了。先知穆罕默德（Mohammed, 570-632）于公元 610 年在麦加创立了伊斯兰教。公元 630 年，穆罕默德率军占领了宗教中心麦加城，确立了伊斯兰教在阿拉伯半岛的统治地位。穆罕默德去世时，阿拉伯半岛已大体统一，随后阿拉伯人开始了对波斯帝国和拜占庭帝国的全面战争。接下来在不到一个世纪的时间里，阿拉伯帝国（Arab Empire, 632-1258）的版图不断扩大。到公元 8 世纪中叶，阿拉伯帝国成为地跨亚、非、欧三大洲的庞大封建军事帝国。阿拉伯帝国先后经历了四大哈里发时期（Four caliphs, 632-661）、倭马亚王朝（Umayyad Caliphate, 661-750）和阿拔斯王朝（Abbasid Dynasty, 750-1258，中国史书称之为“黑衣大食”）。

地理学家伊德里西（al-Idrisi, 1100-1166）所绘世界地图

公元 727 年，阿拨斯王朝将首都迁往巴格达，第二任哈里发曼苏尔（al-Mansūr, 754-775 年在位）仿效波斯旧制，建立起了完整的行政体制，在其建立后的最初一百年间，特别是第五任哈里发哈伦 • 拉希德（Harun al-Rashed, 786-809 年在位）和第七任哈里发马蒙（al-Māmūn, 813-833 年在位）执政时期是阿拉伯帝国的极盛时期，同时阿拉伯的科学文化事业也进入了繁荣昌盛阶段。哈伦 • 拉希德在巴格达建立了一座图书馆，并从近东地区各类学术机构收集了大量抄本，其中包括了许多古希腊数学和科学的文献，并将它们翻译成阿拉伯语。随后马蒙创建了一个名为“智慧宫”的研究机构，它一直存在了二百

多年。其间大批的叙利亚、伊朗、美索不达米亚和印度等地的学者被邀请或聚集在这里，他们把大量的古代经典文献译成阿拉伯文。在翻译过程中，还对许多文献重新进行了考证、校订、增补和注释，其中包含欧几里得（Euclid，约公元前 325- 前 265）、阿基米德（Archimedes，公元前 287- 前 212）、托勒密（Ptolemaeus，约 90-168）、丢番图（Diophantus，约 210- 约 290）、婆罗摩笈多（Brahmagupta，约 598-665）等希腊、印度学者的数学和天文学著作。这些阿拉伯语译本成为后来欧洲人了解古代数学的主要来源，因此阿拉伯人在对希腊和印度数学知识的保存工作方面功不可灭。然而阿拉伯数学家们既非希腊、印度数学的收藏家，也不是缺乏独创精神的模仿者。至公元 15 世纪初，他们在代数学、几何学和三角学等多个数学分支领域都做出了重要贡献。下文中笔者基于大量阿拉伯文数学文献的解读，对阿拉伯代数学的演化脉络进行梳理。

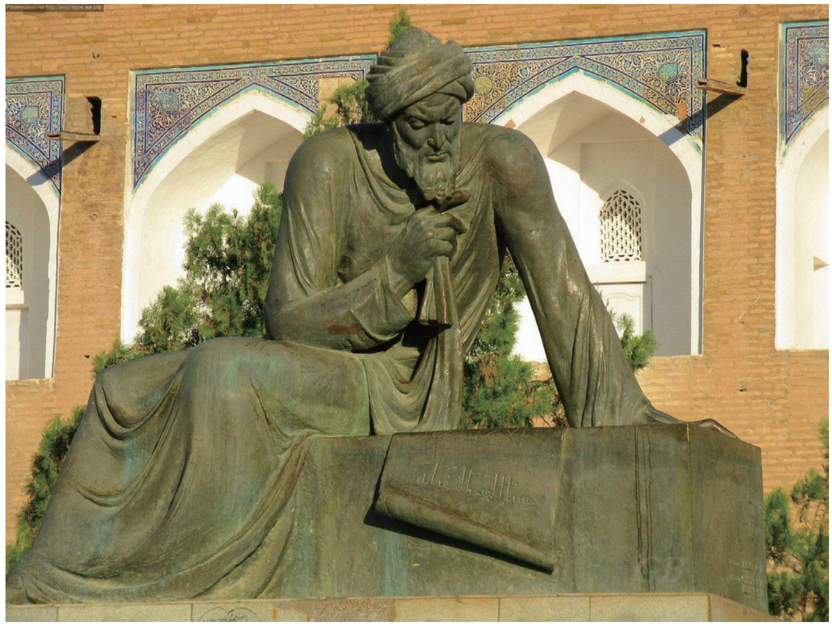
瓦西特（al-Wasit）所绘《巴士拉图书馆里的讲座》(1237)

1、代数溯源——花拉子密《还原与对消之书》

“代数”一词源于阿拉伯语“al-jabr”，它最早出现在花拉子密（Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī，约 780- 约 850）的著作《还原与对消之书》[2]（Kitāb al-jabr wa-al-muqābala）（成书于约 820 年）中，该书简称《代数学》，这是在哈里发马蒙的倡导和鼓励下写成的。

《代数学》包括三部分：(1)、还原与对消（线性方程和二次方程，40 道例题和 6 幅图）；(2)、商贸问题（即“三率法”，2 道例题）、面积问题（简单

[2] Al-Khwārizmī, Edited with translation and commentary by Roshdi Rashed. *The Beginnings of Algebra*. SAQI, Landon, 2009.



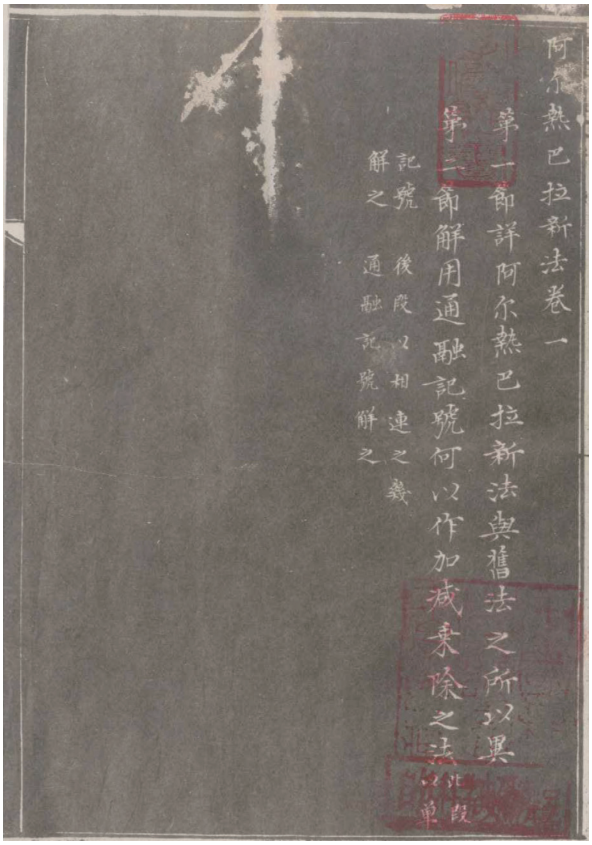
左：苏联发行纪念花拉子密诞辰 1200 周年邮票（1983）；右：今乌兹别克斯坦境内花拉子密塑像

图形的面积、体积计算问题，14 道例题，12 幅图）；（3）、遗产继承问题（源于阿拉伯遗产法的复杂线性方程、不定方程、方程组问题，58 道例题）。

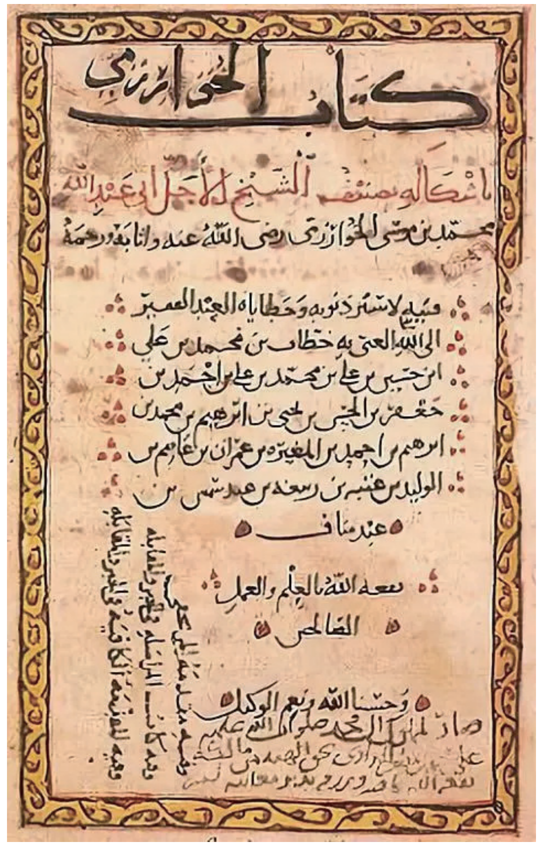
花拉子密首先指出这部分内容都是由根、平方和常数三者组成。对于求解含有未知数的问题，他设未知数为“物”，相当于今 x，随后根据题意列方程。在方程化简过程中便涉及“还原与对消”（al-jabr wa'l-muqābala）。“al-jabr”即为“还原”，花拉子密将其定义为这样一种运算：将方程一侧的一个减去的量移到方程的另一侧变为加上的量，例如 $5x + 1 = 2 - 3x$，变为 $8x + 1 = 2$，这就是一个“还原”过程。“al-muqābala”的意思是将方程两侧的同类正项消去，例如 $8x + 1 = 2$ 化为 $8x = 1$，这就是一个“对消”过程。后来的阿拉伯数学家通常用“还原”一词来代替整个还原与对消算法，随后该算法传至欧洲，“还原”一词逐渐演变为今天英文中“algebra”一词。西方代数学至迟到清初已由传教士传入我国，起初被译为“阿尔热巴拉”“阿尔朱巴尔”“阿尔热巴达”“阿尔热巴喇”等。直至咸丰三年（1853）伟烈亚力在其所著《数学启蒙》中，才首次用“代数”二字作为数学分科的名词。[3]

当时花拉子密仅考虑含有正根的方程，很明显通过还原与对消任何方程都可以化为一些正项之和等于另外一些正项之和的形式。花拉子密将所有的线性方程和二次方程最终可化为如下六种形式之一：$x^2 = bx$, $x^2 = c$, $x = c$, $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c(b, c > 0)$。接下来是方程的解法，尤其是针对后三种方程，花拉子密给出与今天相同的公式解法。例如类型五：$x^2 + c = bx\ (b, c > 0)$，这

[3] 赵栓林．对《代数学》和《代数术》术语翻译的研究．内蒙古师范大学硕士学位论文．2006.



傅圣泽(J. F. Foucquet, 1665-1741)著《阿尔热巴拉新法》



花拉子密著《代数学》首页（约 820）

是六种类型方程中唯一一种可能存在两个正根的一元二次方程，花拉子密给出了两个根：

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2}-c}.$$

同时它也是这六种类型方程中唯一一种可能无根的一元二次方程，花拉子密同样给出了根的存在条件判别法。接下来他用了四个准确直观的几何模型说明了其对应公式解的正确性。此处非语言表述系统中的几何模型并没有体现出任何演绎形式，仅仅是为代数方程服务的。随后花拉子密利用简短的篇幅描述了常数项、一次项、二次项以及它们组成的多项式之间的加减乘除运算法则。[4]

花拉子密的阐述系统而全面，著名数学史学家鲍耶（Carl B. Boyer, 1906-1976）将其称为“代数学之父”[5]。“科学史之父”乔治 • 萨顿（George Sarton,

[4] 关于花拉子密《代数学》较为详尽的论述可以参考：郭园园 . 代数溯源——花拉子密《代数学》研究 . 北京：科学出版社 . 2020.

[5] Carl. B. Boyer 著 , Uta. C. Merabach 修订 , 秦传安译 , 数学史 (上册). 北京 : 中央编译出版社 . 2012. 256.