瑟斯顿与低维拓扑

刘晓波

这个秋天美国拓扑学界巨星陨落。不世出的天才威廉•瑟斯顿（William Thurston）因病逝世。

近几年来关于庞加莱猜想的新闻见诸中文媒体之上，使瑟斯顿的大名越洋远播，不少国人因而得知瑟斯顿的主要贡献在于提出并部分证明了蕴涵庞加莱（Poincaré）猜想在内的几何化猜想。2006年国际数学家大会已经宣布几何化猜想被俄罗斯数学家佩雷尔曼（Perelman）攻克。我们现在解开束缚，可以完全自由地讨论三维流形的具体分类了。瑟斯顿此去应无遗憾。

威廉•瑟斯顿（1946-2012）

瑟斯顿于1967年从佛罗里达州的New College of Sarasota获得他的生物学士学位。据他自己所述，这个学校非常重视独立研究，所以在本科期间他读了不少数学书。毕业以后去加州大学伯克利分校攻读数学博士。这个故事可以激励很多身在其它专业而热爱数学的同学。很多最具原创性的数学家并非一开始就研究数学。

瑟斯顿的博士和博士后期间的工作主要是关于分叶结构的。所谓分叶，就是将一个几何空间分解为维数统一的子空间的并集。对于封闭的几何空间，低一维的分叶(codimension one foliation)的存在性受到一个比较显然的限制，就是欧拉示性数必须是0。球面的欧拉示性数为+2，所以球面是不存在低一维分叶的，或者说，不存在一族互不相交的曲线来填充球面。轮胎面欧拉数为0，它的确可以被一族圆圈填充。瑟斯顿在这个课题上获得了令人惊异的结果：在任何维数，如果仅考虑光滑的低一维分叶结构的存在性，那么这个对欧拉数的限制就是唯一的限制。也就是说，只要一个封闭流形的欧拉示性数是0，那么就存在它的一个低一维光滑分叶结构。这个结果是出人意料的，一般而言，这类存在性问题不会有这么简单明了的充分必要条件。瑟斯顿就是这样，他得到的结果总是让人大吃一惊。

瑟斯顿博士期间关于三维空间上分叶结构的研究使得他对三维空间的内部构造有了非常敏锐的感觉。这种感觉把他引至关于三维空间的几何结构的研究，从而发现了最令人吃惊的结果——原来绝大多数不可约三维流形都能被赋予双曲度量。当黎曼（Riemann）在1854年提出他的“流形”概念的时候，他把当时还未被广泛接受的双曲几何(即非欧几何)作为他的一般度量概念的一个非常特殊的情形。现在我们看到在三维这个人类存在的空间维数，双曲几何是如此普遍的存在。当庞加莱在19世纪末将双曲几何从故纸堆里翻出来进行系统研究的时候，他不会想到这个几何结构同他另一个关心的问题（庞加莱猜想）正好构成三维流形结构问题中两个互补的方面。

瑟斯顿对待数学研究有一种与众不同的态度。他没有要把证明写得滴水不漏的习惯。他更强调观察、思考、直觉。他这种天马行空的风格不由得让人想到黎曼。所以瑟斯顿正式出版的作品不多，被业内人视为珍宝。我们来稍微领略一下他的这种风格，翻译一段瑟斯顿唯一正式出版的研究型教科书《三维的几何与拓扑》（Three-Dimensional Geometry and Topology）的导读：

当我们想介绍一个课题的时候，效率最高的叙述顺序莫过于逻辑顺序，正如很多书籍所做的那样：先给出一堆定义，却不解释背景和来源；给出好多答案，却没有先引出相应的问题。这样一个顺序跟我们接受这个课题的心理历程截然不同。当读者面对这样一个形式的逻辑演绎体系时，唯一的选择就是被牵着鼻子走，只能抱着最终能豁然贯通的希望。

然而数学是一个庞大且高度交叉的体系。这个体系远远不是线性展开的。学习数学需要始终保持活跃的思维，不断提出问题，不断在脑子里形成当前课题与其他内容的联系，这样才能建立自己对这整个体系的一个感觉，而并不仅仅是走马观花。

任何有趣的数学领域都不是自成体系的，也不是完备的：相反，到处都是不完全，到处都是自然而生却不容易通过本领域的方法技巧来解决的问题和想法。这些不完全经常能导致看起来毫不相关的几个领域之间的联系。人们在诠释数学时习惯于掩盖这些不完全，这样看起来更加流畅，然而，一块饱和的海绵就失去了吸收的能力……

这本书正如作者自己所说，运用了一种奇怪的、非逻

瑟斯顿在 2010 年的巴黎时装秀

辑的结构。很难说这本书到底适合有一定数学成熟性的人还是更适合初学者。很多证明和想法能让没有太多数学背景的人接受。比如第一章，只有一个公式和极少的数学符号，满篇都是文字说明和示意图。但书里的练习题和思考题真是又多又难。此书的原型是瑟斯顿的研究笔记。书里的内容大致相当于笔记的前三节的扩充。而笔记本身经过整理至少有十三节，越往后越艰深。1997 年这本书出版的时候，这些笔记已经在圈内人中流传了 20 多年。可惜的是，瑟斯顿本人并没有足够的动力去完成把研究笔记完全整理成书的工作。他的笔记固然已经十分可贵，《三维的几何与拓扑》这本书更添精彩。倘若十三节笔记都能由他本人成书，从而完全展现瑟斯顿数学思想的细节，将是数学人何等大幸。

瑟斯顿于 1982 年获得菲尔兹（Fields）奖的主要成果是提出并部分证明了几何化猜想。这个猜想是关于三维流形的。它在二维有一个类比。人们早就知道这个二维类比是成立的。从这个二维类比出发我们可能更容易理解几何化的背景。20 世纪初期大家已经知道，所有的曲面其实都可以实现为曲率为常数的黎曼流形。球面是最直观的例子，三维空间中的单位球面就是这样一种形态，它在每一点的曲率均为 +1；轮胎面的均匀弯曲形态不容易直接观察到，但是我们可以先看圆柱面，显然圆柱面的曲率为 0，而轮胎面实际上由把圆柱面的两个边界对接得到，这个对接可以保证度量的连续性，所以我们看到轮胎面具有点点曲率为 0 的形态；多环面就稍微复杂一些，但通过所谓曲面的多边形表示可以论证，多环面具有点点曲率为 −1 的形态。这些几何形态的特点是，由于每一点的几何性质都一样（特别的，这些例子里每一点的曲率都一样），所以在局部上不可能通过测量来区分两个点。这种性质称为局部齐性。本质上，这种局部齐性来自于它们的模型空间的整体齐性。也就是说，给定模型空间 X 的任意两点 x 和 y，总存在一个 X 到自身的等距映射 f，使得 $f(x) = y$。球面、欧氏平面、双曲平面都具有这样的性质。它们分别是二维世界中三种几何的模型空间：球几何、欧氏几何、双曲几何（或称为非欧几何）。所有的二维流形都可以被赋予这三种几何中的一种。这就是二维的几何化。瑟斯顿的想法是在三维也实现类似的几何化。

三维的情况当然比二维复杂。首先，如果一个三维流形 M 的拓扑比较复杂，比如，M 中存在一个拓扑球面 $\mathbb{S}^2$ 把 M 分成两个部分，使得两个部分都不是球体（这样一个球面称

拓扑结构的雕塑

为本质球面），那么这个三维流形的模型空间里也必然包含这么一个本质球面。而我们知道三维球面 $\mathbb{S}^3$ 和三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 都不存在本质球面。那么显然，M 不可能容许球几何、欧氏几何，或者双曲几何（双曲几何空间 $\mathbb{H}^3$ 也同胚于 $\mathbb{R}^3$），因为这些几何的模型空间不能包含本质球面。这一类的限制是拓扑限制，也就是说，要装配某种几何，必须具有某种特殊的拓扑性质。其实在二维也有这样的限制，比如，高斯 - 博内（Gauss-Bonnet）定理断言曲面的欧拉示性数等于曲率的积分。所以欧拉示性数为 +2 的曲面、球面，是不可能被赋予曲率为 -1 的双曲度量的。三维的拓扑限制更大，比如本质球面的限制，实际上意味着大部分这样的三维流形不存在几何结构（瑟斯顿证明三维中存在 8 种几何，其中 7 种都不容许本质球面，因为它们的模型空间不是同胚于 $\mathbb{S}^3$ 就是同胚于 $\mathbb{R}^3$）。

容易想到，如果三维流形含有本质球面，那么就沿着这个球面切开，分成两个三维流形。如果这两个组成部分各自还含有本质球面，就继续施行这种切割，直到所有组成部分都不含有本质球面为止。这个程序是否总是可行呢？在瑟斯顿之前，拓扑学家们已经对三维流形的拓扑有很深的了解，其中大部分工作都是受到庞加莱猜想的驱动。他们为瑟斯顿提出几何化猜想准备了工具。比如，沿着本质球面切开的程序已被证明可行。普通三维流形都可以唯一分解成有限个不含本质球面的组成部分。类比代数概念，这些组成部分称为素三维流形或者不可约三维流形。这些在本质球面意义下不可分割的流形还可以沿一些本质环面切开而分解成更简单的组成部分。本质环面也限制三维流形上某些几何结构的存在性。瑟斯顿猜想，虽然在一般三维流形上不一定存在几何结构，但经过上述两步的分解之后，在它每个组成部分上都存在某种几何结构。

瑟斯顿最大的贡献在于他证明，经过两步分解之后，那些既不含本质球面又不含本质环面的组分上存在双曲几何结构。他证明的双曲化定理实际上要更广泛一些。结合其它一些结果，几何化猜想的很多情形都得到了证明，除了两个最困难的情形：1，封闭流形的基本群有限是球度量存在的充分必要条件（蕴含庞加莱猜想）；2，基本群无限而不含本质曲面的流形具有双曲度量。[这两个情形在 2004 年由俄罗斯数学家佩雷尔曼运用偏微分方程的工具里奇流（Ricci flow）证明。] 尽管瑟斯顿没能一鼓作气完全证明几何化猜想，他的双曲化定理已经给双曲几何在低维拓扑中的应用开拓了无限的空间。流形上的几何结构比拓扑结构更精细更丰富，现在既然我们知道大多数不可约三维流形能被赋予双曲度量，则利用这个双曲度量来研究流形的拓扑乃是事半功倍的。比如，困扰数学家们 100 年之久的纽结分类问题，在双曲几何的威力下基本上得到了解决。根据空间挖掉纽结之后的补空间的拓扑性质，复杂的纽结可以分解为简单纽结（同之前提到的本质环面分解相关），而简单纽结中绝大多数的补空间都具有双曲几何结构。这种纽结称为双曲纽结。对于双曲纽结，所有通过双曲几何计算出来的量都是纽结的拓扑不变量。这其中有一个量（实际上是一个图）被用来区分所有不同的纽结。类似的算法被归纳到计算机软件应用中（比如软件 SnapPea），用以对具体三维流形或纽结的拓扑做细致的研究。

瑟斯顿对双曲化定理的证明动用了大量工具，有直接采用前人的，有经过自己改进的，还有全新设计的。这些工具涉及的领域非常广泛，包括低维拓扑、微分几何、度量几何、复分析、群论、泛函分析。即便对这些工具及其在该证明中的使用仅仅进行扼要的介绍，也需要 400 到 500 页的篇幅，比如迈克尔 • 卡波维奇（Michael Kapovich）的著作《双曲流形与离散群》（Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups）。在如此丰富的思想与技巧的海洋中游弋无疑是种享受。这是瑟斯顿留给这个世界的宝贵遗产。

作者简介：刘晓波，本科毕业于北大数学学院，美国南加州大学数学博士，从事低维几何拓扑研究，现任职于中国科学院数学与系统科学研究院。