是非成败转头空 *异或运算的应用*

万精油

上期趣味数学专栏的题目是棋盘定位。为方便解答，我们把上期题目再列一遍。

上期题目：

棋盘定位：教授把你叫到他的办公室，给你一个国际象棋棋盘（8×8 方格），棋盘上有些格子里有棋子，有些格子里没有棋子。棋子都是翻过来的，也就是说每个棋子都一样。教授在棋盘上随便指了一格。你现在需要做下面两件事中的一个：

1. 选一个有棋子的格子，把棋子从格子中拿走。

   或者

2. 选一个没有棋子的格子，放一个棋子到格子中。

教授再把你的朋友叫进来，把你改变过的棋盘给他看。他的任务是从棋盘中看出教授所指的那个格子。

注意，棋盘的初始状态是随机的，教授所指的格子也是随机的。两个动作你只能选一样来做。你可以事先与你的朋友商量好一套利用棋盘上的棋子位置的信息传递系统，使得你的朋友总可以确定教授所指的格子。

解答：将棋盘上的位置按 0, 1,⋯, 63 标号。对任何一个格局 A，设 $F(A) = x_1\text{^}x_2\text{^}\cdots\text{^}x_k$，其中 $x_1,\cdots x_k$ 为其位置上有棋子的点的标号。符号 ^ 为对应于每一个比特的异或运算。对于教授指定的任何一点 p，只要变动 $F(A)\text{^}p$ 位置上的棋盘即可。如果该点没有子则加子，有子则把它拿掉。

你的朋友看到格局 B 时，只需算出 $F(B)$, $F(B)$ 所对应的点即为教授所指定的点 p。

对于熟悉异或运算的人来说，这个解法一目了然，非常漂亮。对于不熟悉异或运算的人来说，可能看不懂。我们现在就来介绍一下这个异或运算。

异或运算是一个逻辑运算。当两个输入量不同时，输出 1，反之输出 0。这个运算英文叫 ExclusiveOR，计算机语言里常用 XOR 表示对每一个比特的异或运算。比如，12 与 9，表示成 2 进制就是 1100, 1001，12^9 ＝ 1100^1001 ＝ 0101 ＝ 5。显然，在有多个数做异或运算时，运算结果由每一个比特上的 1 的奇偶性决定。奇数个 1 结果就是 1，偶数个 1 结果就是 0。

异或运算表

输入		输出
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

考虑一下模 2 的加法运算。$0+0=0$; $0+1=1$; $1+0=1$; $1+1\equiv 0 \pmod 2$。可以看出，异或运算与模 2 的加法等价。它满足交换律、结合律。

从这个模 2 等价可以得出异或运算的一个重要性能，我把它称为还原功能。具体说起来就是，对任意 x, y : $x\hat{}(x\hat{}y)=y$。因为任何比特自己与自己相加总是偶数，模 2 就是 0。所以，别的数不受影响。

当 y 与 x 进行异或运算后，表面上看起来，y 的信息消失了。但是，如果我们把这个结果再与 x 进行异或运算，消失的 y 又出现了。

有了这个还原性，我们可以来解释一下本文的标题。第一次运算，是是非非都成了 0(是与是，非与非都变成了 0)，正好对应了“是非成败转头空”。第二次运算，“转头空”的东西又出现了，正好对应那句诗的后一句，“青山依旧在”。

有了这些准备工作，我们可以来解释前面的解答了。

假设原来的棋盘格局是 A，教授指定点 p，我们变动的是 $F(A)\hat{}p$ 点，其中 $F(A)$ 是对 A 中所有有棋子的点的标号做的连续异或运算。$F(A)=x_1\hat{}x_2\hat{}\cdots\hat{}x_k$，其中 $x_1,\cdots x_k$ 为其位置上有棋子的点的标号。

如果 $F(A)\hat{}p$ 点没有棋子，我们在那里加一个子。设变动后的格局为 B。格局 B 就是格局 A 加上 $F(A)\hat{}p$，所以，

$F(B)=x_1\hat{}x_2\hat{}\cdots\hat{}x_k\hat{}(F(A)\hat{}p)=F(A)\hat{}(F(A)\hat{}p)$。利用异或运算的还原性，两个 $F(A)$ 消掉了，结果正好是教授指定的点 p。

如果 $F(A)\hat{}p$ 点有棋子，设该点为 x_i, 我们把 x_i 点的棋子去掉，相当于对 x_i 异或运算两次（两次就把该点化为 0）。所以，

$F(B)=x_1\hat{}x_2\hat{}\cdots x_{i-1}\hat{}x_{i+1}\ldots\hat{}x_k=x_1\hat{}x_2\hat{}\cdots x_{i-1}\hat{}x_{i+1}\cdots\hat{}x_k\hat{}(x_i\hat{}x_i)=x_1\hat{}x_2\hat{}\cdots x_{i-1}\hat{}x_i\hat{}x_{i+1}\cdots\hat{}x_k\hat{}x_i$ $=F(A)\hat{}x_i=F(A)\hat{}(F(A)\hat{}p)$，结果还是教授指定的点 p。

前面的解释或许太抽象，不好懂。我们来看一个具体例子：

假设棋盘是 4×4 的大小。初始格局如下图（有圆圈的格子表示有棋子）。