神奇的伽玛函数

靳志辉

0.1 开篇

数学爱好者们汇集在网络论坛上的一大乐事就是对各类和数学相关的事物评头论足、论资排辈。如果要评选历史上最伟大的数学家，就会有一大堆的粉丝围绕高斯、黎曼、牛顿、欧拉、阿基米德等一流人物展开口水战；如果要讨论最奇妙的数学常数，e, π, $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 肯定在候选队列中；如果要推举最美丽的数学公式，欧拉公式

$$e^{i\pi}+1=0$$

与和式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

常常被数学爱好者们提及；如果有人追问最神奇的数学函数是什么？这个问题自然又会变得极具争议，而我相信如下这个长相有点奇特的伽玛函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

一定会出现在候选队列中。

伽玛函数不是初等函数，而是用积分形式定义的超越函数，怎么看都让人觉得不如初等函数自然亲切。然而伽玛函数也被称为阶乘函数，高等数学会告诉我们一个基本结论：伽玛函数是阶乘的推广。通过分部积分的方法，容易证明这个函数具有如下的递归性质

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

由此可以推导出，对于任意的自然数 n

$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

由于伽玛函数在整个实数轴上都有定义，于是可以看做阶乘概念在实数集上的延拓。

如果我们继续再学习一些数学，就会惊奇地发现这个具有神秘气质的伽玛函数真是才华横溢。她栖身于现代数学的各个分支，在微积分、概率论、偏微分方程、组合数学，甚至是看起来八竿子打不着的数论当中，都起着重要的作用，并且这个函数绝非数学家们凭空臆想的一个抽象玩具，它具有极高的实用价值，频繁现身于现代科学尤其是物理学之中。

笔者对数学的涉猎很有限，主要是从概率统计中频繁地接触和学习这个函数，不过这个函数多年来一直都让笔者心存疑惑：

1. 都说 $n!$ 和伽玛函数是近亲，可是从相貌上这两个数学公式都差了十万八千里，历史上数学家们是如何找到这个奇特的函数的？
2. 现代数学对伽玛函数的定义使它满足 $\Gamma(n)=(n-1)!$，既然号称是 $n!$ 的推广，为何定义伽玛函数的时候不让它满足 $\Gamma(n)=n!$？这看起来不是更加舒服自然吗？
3. 伽玛函数是唯一满足阶乘特性的推广函数吗？
4. 伽玛函数在各种概率分布的密度函数中频繁出现，其本身是否有直观的概率解释？

带着这些疑问，笔者翻阅了许多讲解伽玛函数历史和应用的资料，发现伽玛函数真是一个来自异族的美女，与生俱来有一种神秘的气质。你要接近她并不难，然而她魅力独特，令你无法看透。从她出生开始，就吸引着众多一流的数学家对她进行解读。历史上伽玛函数的发现，和数学家们对阶乘、插值以及积分的研究有着紧密的关系，而这最早要从著名的沃利斯公式讲起。

0.2 无心插柳——沃利斯公式

1655 年，英国数学家沃利斯（John Wallis）写下了一个神奇的数学公式

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

π 居然可以如此齐整地表示成奇数、偶数的比值，着实令人惊讶。历史上数学家们为了寻求对 π 这个迷人的常数更加深刻的理解，前赴后继倾注了无数的精力。数学家们发现，π 可以表达成许许多多奇妙的形式，而沃利斯公式是欧洲历史上发现的第二个把 π 表达成无穷序列的形式，由于它简洁的对称美，也成为了许多数学人经常提及的数学公式之一。为何沃利斯公式会和伽玛函数发生联系呢？实际上对沃利斯公式做一下变形整理就可以得到如下等价形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

我们看到了阶乘，所以沃利斯公式天然和阶乘有着紧密的联系。

沃利斯（1616-1703）

我们先来欣赏一下沃利斯公式的证明。利用现代数学分析的知识证明这个公式并不难，通常微积分课本对这个公式的证明是从积分式

$$I(n)=\int_0^{\pi}\sin^n x dx$$

出发，通过分部积分得到一个关于 $I(n)$ 的递推公式，反复使用这个递推公式就可以证明结论。不过这个证明思路有点繁琐，数学家波利亚（George Pólya）在他的名著《数学与猜想》中提到了另外一个非常简洁、符合直觉，但是不够严格的证明思路，其中用到的最重要的公式是数学家欧拉提供的。欧拉当年研究正弦函数 $\sin x$ 的时候，发现该函数有无穷多个零点 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$。而一个多项式 $f(x)$ 如果有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$（此处 x_i 和 x_j 可以相同，对应于有重根的情形），那么 $f(x)$ 一定可以表示为

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

于是欧拉大胆地猜测 $\sin x$ 也具有多项式的这种性质，即

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=x(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\cdots. \qquad (2)$$

理工科背景的学生大都学习过 $\sin x$ 的泰勒展开式，通常只有数学系的学生才会接触到这个 $\sin x$ 的无穷乘积展开式。这个展开式在数学推导中有许多妙用。数学史上它发挥的第一个重要作用，就是帮助欧拉推导出了如下美丽的公式

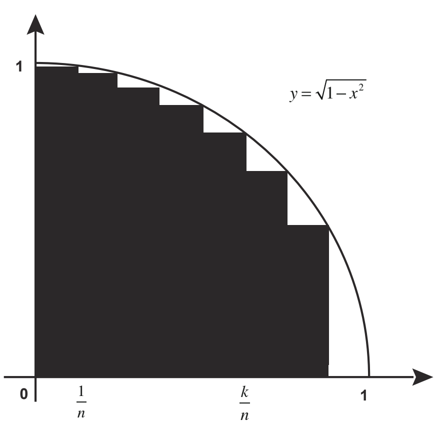
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

这个展开式子的另一个妙处就是可以用于证明沃利斯公式，不过这个思路并非欧拉本人给出，而是后来的数学家发现的。在 (2) 式中取 $x=\frac{\pi}{2}$，可以得到

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$

所以

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)$$



求圆弧下的面积

上式就是沃利斯公式（1）。之所以说以上的证明思路不够严格，是由于欧拉给的 $\sin x$ 无穷乘积展开式的严格证明并不简单，依赖于现代数学分析理论。

欣赏完沃利斯公式的证明，我们把镜头重新拉回到沃利斯生活的年代，要知道沃利斯给出这个公式是在 1655 年，那时候牛顿刚满 13 岁，莱布尼茨更小，欧拉还没出生，整个欧洲数学界对微积分的认识还停留在非常粗糙的阶段，对正弦函数 $\sin x$ 的认识也非常有限，所以沃利斯当然不可能用上述的思路找到他的公式，那沃利斯是如何发现这个 π 的无穷乘积表达式的呢？

在沃利斯的时代，微积分有了初步的进展，当时考虑的典型问题就是求一个曲线和坐标轴围成的面积。欧洲的数学家们追寻阿基米德一千多年前开创的穷竭法，把曲线下的面积表达为求无穷多个矩形面积的和。当积分的思想在十七世纪开始逐步发酵的时候，沃利斯已经能够运用积分的思路处理一些简单曲线的面积。譬如，对于最简单的幂函数曲线 $y=x^n$，使用我们现在的数学记号，沃利斯时代的数学家们获得了如下的结果：

$$\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1},\quad n=0,1,2\cdots.$$

圆的面积一直是千百年来数学家们深入关心和研究的问题，很自然地沃利斯也想到了可以使用同样的思路来处理圆的面积。不过数学家们早已经证明圆的面积是 πr^2，用积分的方法去计算圆的面积能带来什么好处呢？沃利斯在此做了一个逆向思维，他的真实目标并不是要计算圆的面积，而是冲着 π 去的。沃利斯的一个漂亮的思路是：我们已经知道四分之一的单位圆圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 和坐标轴围成的面积是 $\frac{\pi}{4}$，如果这个面积能通过无穷分割的方法表达成一个解析表达式，那我们其实就可以得到计算 π 的一个解析表达式。

然而沃利斯在处理这个圆弧下的面积的时候遇到了困难。虽然基于无穷分割的方法可以得到

$$\int_0^1(1-x^2)^{1/2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

但是这个极限难以简化计算。沃利斯天才的地方就是换了一个更一般的思路来处理这个问题：

1. 考虑更一般的曲线面积问题

$$A_{p,q}=\int_0^1(1-x^{\frac{1}{p}})^q\,dx.$$

   原来的问题变成了一个特例，就是计算 $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$；
2. 对 p,q 为整数的情况做计算，并系统地列成表格，从表格中观察变化规律，总结出一般的公式；
3. 把计算公式从 p,q 为整数的情形延拓、内插到分数的情形，从而计算出 $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$。

沃利斯对 $p,q=1,2,\cdots,10$ 做了计算，发现 $A_{p,q}$ 这个表格不太好看，改为倒数之后容易分析。于是取 $B_{p,q}=\frac{1}{A_{p,q}}$，列出表格一看，居然恰好是帕斯卡三角形！这个三角形中的组合数已经是数学家们熟知的，于是沃利斯很容易地得到

$$B_{p,q}=\frac{(p+q)!}{p!q!}=\frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\cdots(q+p),\quad q=0,1,2\cdots \tag{3}$$

由上式进一步可以得到如下的递推公式

$$B_{p,q}=\frac{p+q}{q}B_{p,q-1}. \tag{4}$$

原始的问题就转化为计算 $B_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$。由此开始，沃利斯开始了他天才的推广：

1. 虽然 (3) 和 (4) 是基于 p,q 为整数得到的，但是沃利斯认为这个公式也应该适用于分数的情形；