指数函数的迭代

丁 玖

数学中最有名、最重要的函数莫过于指数函数了，物理、化学、生物等自然科学领域无处不见指数函数的踪影。从中学起我们就开始学习指数函数，并了解了它们的种种初等性质，如定义域、值域及单调性。到了大学我们又回到指数函数，知道了怎样求它们的导数和积分，也会运用它们来求解有关生物种群指数增长或放射性物质指数衰减的问题。正因为指数函数及其反函数 - 对数函数的应用如此之广，在高中的代数课上，我们不知学了多少与它们有关的知识，也不知做了多少道习题，对求解各种各样的指数函数题我们似乎都能得心应手。

但是，我们对指数函数真的已了解得十分透切吗？请不要忘记，在我们读书或应用时碰到指数函数的场所，面临的几乎都是所谓的“静态问题”，即某个指数函数一旦给出，它就动也不想动了，导致函数或其导数的赋值仅需一次或寥寥几次运算就可大功告成。

然而我们却是生活在动态的大千世界之中，数学也不例外。“动力系统”这门学科研究的就是任何随时间而变化的量，当时间走向无穷远时的最终性态。如果我们只取离散的整数时间 0, 1, 2, 3，……，涉及之量的“随时而变”就是其子学科“离散动力系统”所要探讨的，它通常等价于逐次迭代将定义域映射到自身之内的一个函数。

现在，我们可以带着动态的心理，重访一回多年的老朋友指数函数。比如说，我们问一问下面这个问题：给定一个底为正数 a 的指数函数 $y=f(x)=a^x$，从任一初始点 x_0 出发，逐次迭代这个函数，得到一个由所有迭代点组成的无穷数列 x_0, x_1, x_2, ……，这些数最终会趋向于一个称之为“极限”的固定数吗？作为一个特例，我们就把底 a 取为迭代的初始点，那么这个称为“由 a 产生的迭代指数”数列是：

a 的 a 次方，a 的 a 的 a 次方，a 的 a 的 a 的 a 次方，……。 (IE)

伟大的瑞士数学家欧拉 1778 年第一次研究了该数列的收敛性问题，而与此密切相关的方程 $x^y=y^x$ 求解问题则早在此前 50 年，由比他大 7 岁的亲密战友、传奇式瑞士数学家家族中的第二代杰出数学家丹尼尔·伯努利提出。后者于 1728 年 6 月 29 日写信给以“哥德巴赫猜想”为世人所知的德国人哥德巴赫，信的结尾是：

“我解决了一个有趣的问题：找到不相等的数 x 和 y 使得 $x^y = y^x$。该方程仅有一组整数解 $x = 2$ 及 $y = 4$，但却有无穷多个有理数解。”

如果你猜想上述迭代指数的数列 (IE) 会收敛到一个极限数，就请你想一想它为什么收敛？如果你借助于计算器对不同的底 a 做一些实验，或许能帮助你猜测。基于试验的合理猜测往往是发现真理的第一步。但是严格无误的证明才是最终成功的必备程序。本文的目的在于帮你思考求解这一“指数函数动力学”的问题。

在开始我们的探索之旅前，我们首先记起关于指数函数的一个基本事实：它是一个处处连续（甚至无穷次处处可微）、其值处处为正的好函数。其次，学过初等微积分中的函数值数列简单极限理论的人都会明白下面这个命题：

如果定义在实数轴上的一个连续函数 f 的迭代点数列 $\{x_n\}$ 收敛到一个极限值 x^*，则 x^* 一定是 f 的一个不动点，即 $f(x^*) = x^*$。

只要在关于自然数 n 的恒等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的两边求 n 趋向于无穷大时的极限，并运用连续函数的极限性质，就证明了上述命题。不动点在几何上有个显然的意义：它是函数 f 的图像和笛卡儿 xy- 直角坐标系的对角线 $y = x$ 之交点的坐标。因而求出函数的所有不动点在几何上就等价于找到它的图像和对角线的所有交点。

我们知道，当初始点取为函数的一个不动点 x^* 时，则所有跟随的迭代点都是同一个点 x^*。但是当初始点 x_0 选为在 x^* 的近旁但却不等于 x^* 时，情形又是如何呢？即：起始于 x_0 的迭代点数列最终是否趋向于 x^*，还是远离它，或是其最终的性态无法知晓？如果我们所关心的迭代函数是像指数函数这样的可微函数，微分学中最重要的“拉格朗日中值定理”就大有用武之地了。其结论是：如果函数 f 在不动点 x^* 的导数值之绝对值小于 1，则对于 x^* 近旁的所有初始点 x_0，迭代点数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x^*；如果函数 f 在不动点 x^* 的导数值之绝对值大于 1，则对于 x^* 近旁与它相异的所有初始点 x_0，迭代点数列 $\{x_n\}$ 不收敛到 x^*；如果函数 f 在不动点 x^* 的导数值之绝对值等于 1，则我们无计可施，没有一般性的结论，只能是“具体问题具体分析”，就像微积分中级数收敛判别定理中那些无法判别结果的例外情况一样。

如果我们嫌上述基于微积分的分析方法难以理解，或用计算器数值计算函数迭代点太花时间，则可以沿着一条几何的东西 - 南北路径迅速地得出同样的结论。首先从 x-轴上函数不动点 x^* 邻近的初始点 x_0 起步，沿着垂直线向着函数图像的方向走，直到与图像相交，然后在交点处转弯沿着水平线向着对角线的方向走，一直走到和对角线相交，这个交点就代表第一个迭代点 x_1。如果该函数在 x^* 的导数值之绝对值小于 1，则上述的几何画图显示 x_1 比 x_0 更靠近 x^*，若这个绝对值大于 1，则 x_1 比 x_0 更远离 x^*。这个事实的严格证明就是拉格朗日中值定理的直接应用。

好了，我们可以从对角线上代表 x_1 的点继续沿着垂直线走，一直走到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着水平线走，直到和对角线相交，这个交点则代表着第二个迭代点 x_2。如此持续地走下去，就依次得到对角线上代表迭代点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\cdots$ 的一个无穷点列。从上面迭代第一步的几何分析，加上数学归纳法，立刻可知在关于导数绝对值的第一种情形，这些迭代点越来越靠近 x^*，并最终收敛于 x^*。而在第二种情形下，这些点当然不可能收敛到 x^*，因为，一旦某个迭代点靠近 x^*，后者马上就像同性相斥的电荷那样将之排斥到更远之处。由于吸引或排斥这两个相反的特性，第一种不动点称为吸引不动点，而第二种则称为排斥不动点。

对于本文关注的指数函数，我们想把上述的“局部”迭代分析推广到全局迭代分

析，即初始点可以取为数轴上的任意一点，而并非仅限制在不动点的近旁。如果对任意的初始点都能知道迭代点数列的最终走向，我们对指数函数的动态行为就做到了“了然于胸”。而如下所示，上述的基本思想和几何直觉，加上初等微积分的巧妙应用，完全可以实现我们的目的。

众所皆知，指数函数是否为严格单调递增或递减，全凭它的底 a 是否大于或小于 1 而定。自然，我们也应该分别考虑这两种情形。

假设底 a 为大于 1 的一个正常数。从中学我们就知道，指数函数 $y = a^x$ 的图像是一条位于 x- 轴上方、向上弯曲、经过点 $(0, 1)$、向右上方向无限延伸而去的光滑曲线。这条曲线的弯曲程度及迅速上升的速度均依赖于 a 的大小。底 a 越大，函数递增得越快，曲线越陡峭；底越靠近 1，递增越缓慢，曲线越平坦。当然在底 a 等于 1 的极端情形，曲线变成一条通过点 $(0, 1)$ 的水平直线，因为它太简单了，故在指数函数的定义中被排除在外。

只要画出两条不同的指数函数图像，分别对应于 $a = 1.2$ 和 $a = 2$，就发现，当底小到一定程度时，其对应的曲线和对角线相交于两点，而当底比 1 大得足够多后，则它们永不相交。不难理解，当指数函数的底连续变动时，其图像也会连续变化，因此我们可以想象，存在底的某个“分界值” a^*，当 a 小于它时，对应的指数函数图像与对角线相交于两点，当 a 等于它时，相交于一点，而当 a 大于它时，则无交点。这个临界值到底等于几呢？

要保证底为 a^* 的这个特别的指数函数有一个并且只有一个不动点，在这个不动点处函数图像必须与对角线相切，否则它们或相交于两点或彼此无交点。这可以从日常生活的经验中体验出来：当一只标准抛物线形状的铁钩子上下运动“穿过”一根水平绳线时，有时它们相交于两个点，有时它们只相切于抛物线的顶点，有时它们互不相交。因为笛卡儿坐标轴的对角线斜率为 1，故指数函数 $(a^*)^x$ 在其不动点的导数值为 1。这样，数 a^* 必须满足“不动点方程”

$$(a^*)^x = x$$

和“切线方程”

$$a^* \ln a^* = 1。$$

这两个方程的唯一解是 $a^* = e^{1/e}$ 及 $x^* = e$。我们可以分三种情况分别考虑指数函数的动力学问题。

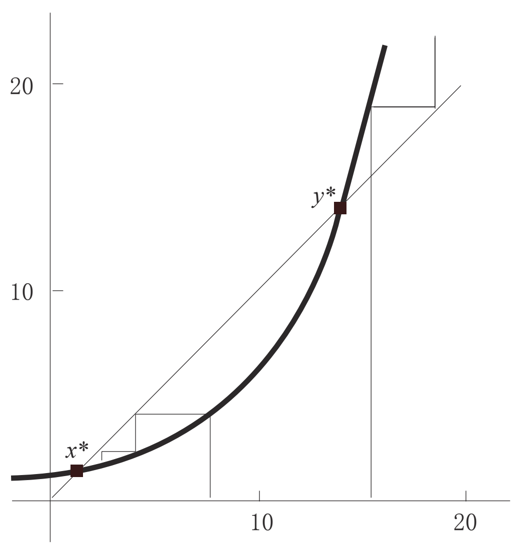

图 1